МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"

УТВЕРЖДАЮ

Первый проректор –
проректор по научной деятельности

__________________ Д.А. Таюрский

« 15 » января 2026 г.

Программа вступительного экзамена по специальности

Уровень высшего образования: подготовка кадров высшей квалификации
Тип образовательной программы: программа подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре
Научная специальность: 1.1.1 Вещественный, комплексный и функциональный анализ
Форма обучения: очная

2026

Общие указания

Программа вступительного экзамена в аспирантуру по специальности 1.1.1 Вещественный, комплексный и функциональный анализ предназначена для лиц, желающим проходить обучение в Федеральном государственном автономном учреждении высшего образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет".

В программу описываются порядок проведения вступительного испытания, критерии оценивания, приведен список вопросов программы, описано учебно-методическое обеспечение и информационное обеспечение программы.

Порядок проведения вступительных испытаний

Вступительное испытание проводится в форме экзамена на основе билетов. В каждом экзаменационном билете по 2 вопроса. Экзамен проходит в письменной форме. Подготовка к ответу составляет 1 академический час (60 минут) без перерыва с момента раздачи билетов. Задания оцениваются от 0 до 100 баллов в зависимости от полноты и правильности ответов.

Критерии оценивания

Оценка поступающему за письменную работу выставляется в соответствии со следующими критериями.

Отлично (80-100 баллов)

Поступающий в аспирантуру уверенной владеет материалом, приводит точные формулировки теорем и других утверждений, сопровождает их строгими и полными доказательствами, уверенно отвечает на дополнительные вопросы программы вступительного испытания.

Хорошо (60-79 баллов) Поступающий в аспирантуру владеет материалом, приводит точные формулировки теорем и других утверждений, сопровождает их доказательствами, в которых допускает отдельные неточности. Отвечает на большинство дополнительных вопросов по программе вступительного испытания.

Удовлетворительно (40-59 баллов) Поступающий в аспирантуру знаком с основным материалом программы, приводит формулировки теорем и других утверждений, но допускает некоторые неточности, сопровождает их доказательствами, в которых допускает погрешности либо описывает основную схему доказательств без указания деталей. Отвечает на дополнительные вопросы по программе вступительного испытания, допуская отдельные неточности.

Неудовлетворительно (менее 40 баллов) Поступающий в аспирантуру не владеет основным материалом программы, не знаком с основными понятиями, не способен приводить формулировки теорем и других утверждений, не умеет доказывать теоремы и другие утверждения, не знает даже схемы доказательств. Не отвечает на большинство дополнительных вопросов по программе вступительного испытания.

Вопросы программы вступительного экзамена в аспирантуру по специальности 1.1.1 Вещественный, комплексный и функциональный анализ

1

Теоремы о существовании неявной функции. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Теорема о существовании интеграла Римана. Несобственные интегралы, признаки равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра. Интегрирование и дифференцирование интегралов по параметру.

Функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Интеграл по контуру. Теорема Коши. Формула Коши. Интеграл типа Коши и его свойства. Формулы Сохоцкого. Принцип максимума, теорема Лиувилля. Ряды аналитических функций, теоремы Вейерштрасса. Степенные ряды, теорема единственности. Ряд Тейлора и ряд Лорана. Поведение функции в окрестности особой точки, теорема Сохоцкого. Вычеты и их свойства.

Метрические пространства. Теорема о пополнении. Топологические пространства. Сравнение топологий. Непрерывные отображения топологических пространств. Гомеоморфные отображения. Способы задания топологий. Индуцированная топология и фактор-топология. Сходимость в топологических пространствах. Компактные топологические пространства и их свойства. Теорема Гейне-Бореля о структуре компактных множеств в R^n.

2

Декартово произведение топологических пространств. Теорема Тихонова о декартовом произведении компактных пространств. Локально компактные пространства и их свойства. Одноточечная компактификация локально компактных пространств. Связные пространства и их свойства.

3

Мера Лебега и ее свойства. Борелевская алгебра на числовей прямой (числовой плоскости), измеримые функции. Измеримые по Борелю функции. Сходимость почти всюду. Теорема Егорова. Сходимость по мере и ее связь со сходимостью почти всюду, интеграл Лебега и его свойства. Предельный переход под знаком интеграла. Почленное интегрирование сходящихся рядов. Теорема Фату. Произведение мер. Теорема Фубини.

Заряды (обобщенные меры). Теорема Хана. Неопределенный интеграл Лебега. Теорема Радона-Никодима. Понятие σ-конечной мере. Определенный интеграл по σ-конечной мере.

4

Теорема Бэра о категориях. Линейное нормированное пространство. Эквивалентность норм в конечномерном пространстве. Банахово пространство линейных ограниченных операторов. Сопряженное пространство. Теорема Хана-Банаха для полунорм и нормированных пространств. Принцип равномерной ограниченности. Понятие топологического линейного пространства. Слабая топология в линейном нормированном пространстве. Абстрактное гильбертово пространство. Теорема об ортогональном разложении. Теорема Рисса об общем виде линейного ограниченного функционала. 0ртонормированные системы. Ряды Фурье. Существование полных ортонормированных систем. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств.

Обратимые линейные операторы в банаховых пространствах. Теорема Банаха об обратном операторе. Вполне непрерывные операторы (компактные) и их свойства. Сопряженный оператор. Замкнутый оператор. Регулярные точки и спектр линейного ограниченного оператора. Классификация точек спектра. Ограниченность, замкнутость, непустота спектра. Свойства спектра вполне непрерывного оператора. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Свойства спектра самосопряженных операторов. Существование ненулевых собственных значений у вполне непрерывного самосопряженного оператора.

Принцип сжимающих отображений и его применение к доказательству существования и единственности решения дифференциального уравнения и интегрального уравнения

Фредгольма с малым параметром. Относительно компактные множества, критерий Хаусдорфа и Фреше. Теорема Арцела.

5

Теория Рисса-Шаудера. Нормальная разрешимость оператора Фредгольма. Теорема Фредгольма. Интегральные уравнения Фредгольма в пространствах $L^2(a,b)$ и $C(a,b)$. Случай вырожденного ядра.

Уравнение Фредгольма в абстрактном гильбертовом пространстве. Теория Гильберта-Шмидта. Приложение к интегральным уравнениям с симметрическим ядром. Нелинейный анализ. Непрерывность и дифференцируемость оператора. Производная Фреше и ее свойства. Необходимое условие экстремума функционала. Простейшие задачи вариационного исчисления и уравнение Эйлера-Лагранжа.

6

Разложение единиц (проекторные меры). Операторные интегралы Стилтьеса. Спектральное разложение самосопряженных операторов. Интегральное представление группы унитарных операторов. Функции от самосопряженного оператора. Оператор дифференцирования.

7

Полиномы наилучшего равномерного приближения. Теоремы Чебышева и Бореля. Полиномы Чебышева первого рода. Прямые теоремы конструктивной теории функций. Теоремы Джексона и их обобщения (периодический и непериодический случаи). Обратные теоремы конструктивной теории функций. Теоремы Бернштейна и Зигмунда.

Суммы Фурье, Фейера, Валле-Пуссена, Бернштейна-Рогозинского и их важнейшие свойства. Наилучшие приближения в нормированных пространствах. Положительные операторы и функционалы. Приложения в конструктивной теории функций. Алгебраическое и тригонометрическое интерполирование. Положительные и отрицательные результаты. Аппроксимация в среднем интерполяционными полиномами. Аппроксимация и интерполяция сплайнами. Теоремы типа Джексона. Экстремальные свойства сплайнов. Квадратурные формулы. Экстремальные задачи теории квадратур. Теорема Банаха-Штейнгауза и ее приложения к конструктивной теории функций.

8

Геометрический смысл дифференцируемости функции комплексного переменного. Понятие конформного отображения. Свойства дробно-линейной функции (единственность, однолистность, круговое сохранение симметричных точек). Геометрические свойства элементарных функций. Лемма Шварца и теорема Римана. Принцип соответствия границ. Аналитическое продолжение по непрерывности. Принцип симметрии. Ветви и точки ветвления. Общее понятия о римановых поверхностях.

9

Связь ядер Коши и Шварца. Формула Гильберта. Регуляризующий множитель для задачи Гильберта. Задача Гильберта с разрывными коэффициентами в полуплоскости. Смешанная краевая задача. Задача Дирихле и ее видоизменения для плоскости со щелями. Задача Римана в односвязной и многосвязной областях. Постановка обратных краевых задач. Решение внутренней и внешней задачи. О числе решений внешней задачи. Особые точки контура. Однолистная разрешимость обратных краевых задач.

Примечание: в качестве вступительного экзамена может быть сдан один из следующих вариантов (указаны разделы программы): 1-й вариант: разделы 1,2,3,4,5,7, 2-й вариант: разделы 1,3,5,6,8, 3-й вариант: разделы 1,3,4,8,9.

Учебно-методическое обеспечение и информационное обеспечение программы вступительного экзамена в аспирантуру по специальности 1.1.1 Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – 7-е изд. – М.: Физматлит, 2009. – 572 с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2206.
2. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т.1-2 М., Наука, 1990-1991.
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного, М., Наука, 1987.
4. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения полиномами, М., Наука, 1978.
5. Никольский С.М. Квадратурные формулы. М., Наука, 1974.
6. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. М., Наука, 1975.
7. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М., Наука, 3-е изд., 1977.
8. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. М., Наука, 1965.
9. Тумашев Г.Г., Нужин М.Т. Обратные краевые задачи и их приложения. Изд-во Казанского ун-та, 1965.
10. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М., Наука, 1960.
11. Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. М., Физматгиз, 1960.
12. Гончаров В.Л. Теория интерполирования и приближения функций. Гостехиздат, М.-Л., 1954.
13. Коровкин П.П. Линейные операторы и теория приближений. М., Физматгиз, 1959.
14. Натансон И.П. Конструктивная теория функций, М.-Л., Гостехиздат, 1949.
15. Бурбаки Н. Общая топология (основные структуры), М., 1958.
16. Шерстнев А.Н. Конспект лекций по математическому анализу: Учебное пособие/ А. Н. Шерстнев. – Казань: Казанский университет, 2009. – 374с. <http://libweb.kpfu.ru/ebooks/05-IMM/05_33_2009_000165.pdf>.
17. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной: учебник для вузов. –Изд. 5-е, стереотип. / И.П. Натансон – Санкт-Петербург [и др.]: Лань, 2008.—560 с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=284.
18. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной: учебник для вузов / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. – Издание 6-е, стереотипное. – Москва: Физматлит, 2010.—336 с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=48167.
19. Евграфов М.А. Аналитические функции / М.А. Евграфов. – Санкт-Петербург: Лань, 2008. - 448 с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=134.
20. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа: учебное пособие. – 2-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2009. – 272 с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=245.
21. Хелемский А.Я. Лекции по функциональному анализу. МЦНМО, 2014. -560 с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=56415.
22. Гумеров Р.Н. Элементы общей топологии, Учебное пособие.- Казань: Изд-во КГУ, 2007, 90 http://libweb.kpfu.ru/ebooks/05-IMM/05_33_2007_000029.pdf>.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Сборник задач по теории функций комплексного переменного и операционному исчислению: учебное пособие для студентов мех.-мат., физ. Фак., фак. ВМК ун-та и факультета повышения квалификации преподавателей / Л.А.Аксентьев. – Казань, Казанский

государственный университет, 2005. –124 с.; 21 см. – Библиогр.: с.114-115.
2. Ульянов П.Л. и др. Действительный анализ в задачах. М.: Физматлит, 2005. – 416 с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2353.
3. Задачи по теории функций и функциональному анализу с решениями: Учебное пособие / Т.А. Леонтьева, А.В. Домрина. – М.: НИЦ Инфра-М, 2013. – 164 с. – ISBN 978-5-16-006429- http://www.znanium.com/bookread.php?book=377270.
4. Насыров С.Р. Метрические и линейные нормированные пространства. Задачи к лабораторным занятиям по курсу "Функциональный анализ и интегральные уравнения" Казань: КГУ, 1998. 31 с. http://kpfu.ru//staff_files/F1714458496/FA_exercises.pdf.
5. Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: Физматлит, 2006. – 312 с. http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=2763.

Программа вступительного экзамена в аспирантуру составлена в соответствии с государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования по специальности 1.1.1 Вещественный, комплексный и функциональный анализ.