

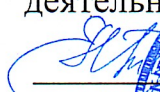
МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по образовательной
деятельности


Е.А. Турилова
« 8 » 2025 г.



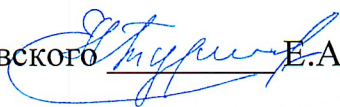
**ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ
ПО МАТЕМАТИКЕ**

2025 г.

Лист согласования программы вступительного испытания

Разработчик программы:

Проректор по образовательной деятельности,
заведующий кафедрой математической статистики

Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского  Е.А. Турилова

Председатель экзаменационной комиссии

 И.Б. Гарипов

Решением Учебно-методической комиссии Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского программа вступительного испытания рекомендована к утверждению Ученым советом, Протокол № 3 от 13 ноября 2025 г.

Программа вступительного испытания утверждена на заседании Ученого совета Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Протокол № 3 от 13 ноября 2025 г.

Алгебра

Числа, корни и степени, целые числа, степень с натуральным показателем, дроби, проценты, рациональные числа, степень с целым показателем, корень степени $n > 1$ и его свойства, степень с рациональным показателем и ее свойства, свойства степени с действительным показателем.

Основы тригонометрии

Синус, косинус, тангенс, котангенс произвольного угла, радианная мера угла, синус, косинус, тангенс и котангенс числа, основные тригонометрические тождества, формулы приведения, синус, косинус и тангенс суммы и разности двух углов, синус и косинус двойного угла.

Логарифмы

Логарифм числа, логарифм произведения, частного, степени, десятичный и натуральный логарифмы, число e .

Преобразования выражений

Преобразования выражений, включающих арифметические операции; преобразования выражений, включающих операцию возведения в степень; преобразования выражений, включающих корни натуральной степени; преобразования тригонометрических выражений; преобразование выражений, включающих операцию логарифмирования; модуль (абсолютная величина) числа.

Уравнения и неравенства

Уравнения

Квадратные уравнения; рациональные уравнения; иррациональные уравнения; тригонометрические уравнения; показательные уравнения; логарифмические уравнения; равносильность уравнений, систем уравнений; простейшие системы уравнений с двумя неизвестными; основные приемы решения систем уравнений: подстановка, алгебраическое сложение, введение новых переменных; использование свойств и графиков функций при решении уравнений; изображение на координатной плоскости множества решений уравнений с двумя переменными и их систем; применение математических методов для решения

содержательных задач из различных областей науки и практики; интерпретация результата, учет реальных ограничений.

Неравенства

Квадратные неравенства; рациональные неравенства; показательные неравенства; логарифмические неравенства; системы линейных неравенств; системы неравенств с одной переменной; равносильность неравенств, систем неравенств; использование свойств и графиков функций при решении неравенств; метод интервалов; изображение на координатной плоскости множества решений неравенств с двумя переменными и их систем.

Функции

Определение и график функции

Функция, область определения функции; множество значений функции; график функции. Примеры функциональных зависимостей в реальных процессах и явлениях; обратная функция. График обратной функции; преобразования графиков: параллельный перенос, симметрия относительно осей координат.

Элементарное исследование функций

Монотонность функции. Промежутки возрастания и убывания; четность и нечетность функции; периодичность функции; ограниченность функции; точки экстремума (локального максимума и минимума) функции; наибольшее и наименьшее значения функции.

Основные элементарные функции

Линейная функция, ее график; функция, описывающая обратную пропорциональную зависимость, ее график; квадратичная функция, ее график; степенная функция с натуральным показателем, ее график; тригонометрические функции, их графики; показательная функция, ее график; логарифмическая функция, ее график; начала математического анализа.

Производная

Понятие о производной функции, геометрический смысл производной; физический смысл производной, нахождение скорости для процесса, заданного формулой или графиком; уравнение касательной к графику функции; производные

суммы, разности, произведения, частного; производные основных элементарных функций; Вторая производная и ее физический смысл.

Исследование функций

Применение производной к исследованию функций и построению графиков; примеры использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических, задачах.

Первообразная и интеграл

Первообразные элементарных функций; примеры применения интеграла в физике и геометрии.

Геометрия

Планиметрия

Треугольник; параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат; трапеция; окружность и круг; окружность, вписанная в треугольник, и окружность, описанная около треугольника; многоугольник. Сумма углов выпуклого многоугольника; правильные многоугольники. Вписанная окружность и описанная окружность правильного многоугольника.

Прямые и плоскости в пространстве

Пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые; перпендикулярность прямых; параллельность прямой и плоскости, признаки и свойства; параллельность плоскостей, признаки и свойства; перпендикулярность прямой и плоскости, признаки и свойства; перпендикуляр и наклонная; теорема о трех перпендикулярах; перпендикулярность плоскостей, признаки и свойства; параллельное проектирование. Изображение пространственных фигур.

Многогранники

Призма, ее основания, боковые ребра, высота, боковая поверхность; прямая призма; правильная призма; параллелепипед; куб; симметрии в кубе, в параллелепипеде; пирамида, ее основание, боковые ребра, высота, боковая поверхность; треугольная пирамида; правильная пирамида; сечения куба, призмы, пирамиды; представление о правильных многогранниках (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр).

Тела и поверхности вращения

Цилиндр. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развертка; конус. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развертка; шар и сфера, их сечения.

Измерение геометрических величин

Величина угла, градусная мера угла, соответствие между величиной угла и длиной дуги окружности; угол между прямыми в пространстве; угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями; длина отрезка, ломаной, окружности, периметр многоугольника; расстояние от точки до прямой, от точки до плоскости; расстояние между параллельными и скрещивающимися прямыми, расстояние между параллельными плоскостями; площадь треугольника, параллелограмма, трапеции, круга, сектора; площадь поверхности конуса, цилиндра, сферы; объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара.

Координаты и векторы

Декартовы координаты на плоскости и в пространстве; формула расстояния между двумя точками; уравнение сферы; вектор, модуль вектора, равенство векторов; сложение векторов и умножение вектора на число; коллинеарные векторы. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам; компланарные векторы. Разложение по трем некомпланарным векторам; координаты вектора; скалярное произведение векторов; угол между векторами; элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей.

Элементы комбинаторики

Поочередный и одновременный выбор; формулы числа сочетаний и перестановок. Бином Ньютона.

Элементы статистики

Табличное и графическое представление данных; числовые характеристики рядов данных.

Элементы теории вероятностей

Вероятности событий; примеры использования вероятностей и статистики при решении прикладных задач.

Требования (умения), проверяемые заданиями экзаменационной работы

Уметь выполнять вычисления и преобразования

- Выполнять арифметические действия, сочетая устные и письменные приемы; находить значения корня натуральной степени, степени с рациональным показателем, логарифма
- Вычислять значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования
- Проводить по известным формулам и правилам преобразования буквенных выражений, включающих степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции
- Уметь решать уравнения и неравенства
- Решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы
- Решать уравнения, простейшие системы уравнений, используя свойства функций и их графиков; использовать для приближенного решения уравнений и неравенств графический метод
- Решать рациональные, показательные и логарифмические неравенства, их системы

Уметь выполнять действия с функциями

- Определять значение функции по значению аргумента при различных способах задания функции; описывать по графику поведение и свойства функции, находить по графику функции наибольшее и наименьшее значения; строить графики изученных функций
- Вычислять производные и первообразные элементарных функций
- Исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшее и наименьшее значения функции

Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами

- Решать планиметрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей)

- Решать простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов); использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы

- Определять координаты точки; проводить операции над векторами, вычислять длину и координаты вектора, угол между векторами

Уметь строить и исследовать простейшие математические модели

- Моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения и неравенства по условию задачи; исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры

- Моделировать реальные ситуации на языке геометрии, исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры; решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин

- Проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений, распознавать логически некорректные рассуждения

Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни

- Анализировать реальные числовые данные; осуществлять практические расчеты по формулам; пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчетах

- Описывать с помощью функций различные реальные зависимости между величинами и интерпретировать их графики; извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках

Решать прикладные задачи, в том числе социально-экономического и физического характера, на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение скорости и ускорения

Система оценивания вступительного испытания

Для выполнения вступительного испытания по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1

Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом. Каждое из заданий № 1-12 считается выполненным верно, если экзаменуемый дал правильный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Правильный ответ на задания № 1-12 оценивается 1 баллом.

Часть 2 (задания с развёрнутым ответом)

Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом. Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

В бланке ответов необходимо записать сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво. Участники вступительного испытания, сдающие его дистанционно, должны записать не только номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), но и его полную формулировку.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным; все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках, входящих в федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих

государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

В части 2 ответы на задания № 13, 15, 16 оцениваются максимально на 2 балла, ответы на задания № 14, 17 оцениваются максимально на 3 балла, ответы на задания № 18, 19 оцениваются максимально на 4 балла.

Критерии оценивания заданий с развёрнутом ответом

Задание № 13	
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание № 14	
Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Задание № 15	
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением или добавлением одной или нескольких точек, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание № 16	
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Задание № 17	
Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

Задание № 18	
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений а, отличающееся от искомого только исключением/включением нескольких точек	3
С помощью верного рассуждения получено хотя бы одно верное значение параметра	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения кривых (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Задание № 19	
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а, б и в	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в и обоснованно получен верный ответ в пункте а или б	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а и б ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Максимальный первичный балл равен 32, что соответствует 100 тестовым баллам.

Минимальный проходной тестовый балл равен 40. Если абитуриент набрал менее 40 тестовых баллов, вступительное испытание считается НЕ пройденным.

Шкала перевода первичных баллов в тестовые баллы

ПЕРВИЧНЫЙ БАЛЛ	ТЕСТОВЫЙ БАЛЛ
1	13
2	26
3	40
4	42
5	45
6	48
7	51
8	54
9	57
10	60
11	64
12	66
13	68
14	70
15	72
16	74
17	76
18	78
19	80
20	82
21	84
22	86
23	88
24	90
25	92
26	94
27	96
28	98
29	100
30	100
31	100
32	100

Образцы заданий вступительных испытаний

Часть 1

Задание 1. Основания равнобедренной трапеции равны 7 и 13, а ее площадь равна 40. Найдите боковую сторону трапеции.

Задание 2. Даны векторы $\vec{a}(3; 4)$ и $\vec{b}(-4; -3)$. Найдите косинус угла между ними.

Задание 3. Длина окружности основания цилиндра равна 3. Площадь боковой поверхности равна 6. Найдите высоту цилиндра.

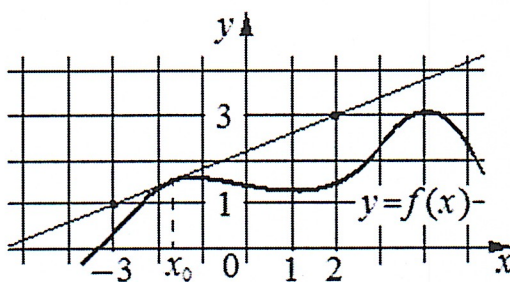
Задание 4. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 8 очков. Результат округлите до сотых.

Задание 5. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая - 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая - 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Задание 6. Найдите корень уравнения $\log_2(15 + x) = \log_2 3$.

Задание 7. Найдите значение выражения: $\frac{32\cos 26^\circ}{\sin 64^\circ}$.

Задание 8. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

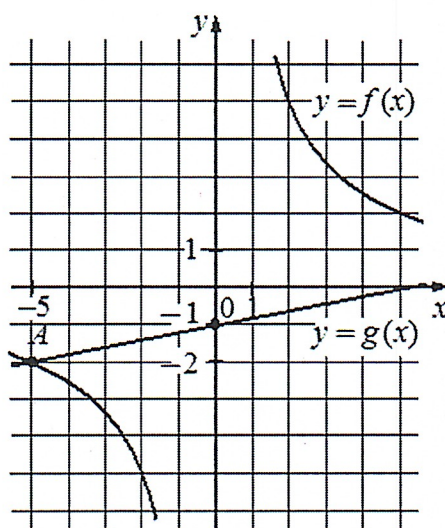


Задание 9. Расстояние (в км) от наблюдателя, находящегося на высоте h м над землей, до видимой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км - радиус Земли. Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 4,8 км. К пляжу ведет лестница, каждая ступенька которой имеет высоту 20 см. На

какое наименьшее количество ступенек нужно подняться человеку, чтобы он увидел горизонт на расстоянии не менее 6,4 километров?

Задание 10. Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 25 км/ч, проходит по течению реки и после стоянки возвращается в исходный пункт. Скорость течения равна 3 км/ч, стоянка длится 5 часов, а в исходный пункт теплоход возвращается через 30 часов после отплытия из него. Сколько километров прошёл теплоход за весь рейс?

Задание 11. На рисунке изображены графики функций $f(x) = \frac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, пересекающиеся в точках A и B . Найдите абсциссу точки B .



Задание 12. Найдите точку минимума функции $y = (8x^2 - 40x + 40)e^{x+4}$.

Часть 2

Задание 13.

а) Решите уравнение $\frac{9\sin 2x - 32\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{11}\sin x} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$.

Задание 14. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ известно, что $AB = 1$. Через точку O пересечения диагоналей основания перпендикулярно ребру SC провели плоскость α .

а) Докажите, что плоскость α проходит через вершины B и D .

б) В каком отношении плоскость α делит ребро SC , считая от вершины S , если площадь сечения равна $\frac{\sqrt{2}}{3}$?

Задание 15. Решите неравенство

$$\log_7(2x^2 + 12) - \log_7(x^2 - x + 12) \geq \log_7\left(2 - \frac{1}{x}\right).$$

Задание 16. 15-го декабря планируется взять кредит в банке на 11 месяцев.

Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 10-й долг должен быть на 80 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- к 15-му числу 11-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какой долг будет 15-го числа 10-го месяца, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1198 тысяч рублей?

Задание 17. В треугольнике ABC точки A_1 , B_1 и C_1 - середины сторон BC , AC и AB соответственно, AN - высота, $\angle BAC = 30^\circ$, $\angle BCA = 45^\circ$.

- а) Докажите, что точки A_1 , B_1 , C_1 и N лежат на одной окружности.
- б) Найдите A_1N , если $BC = 4\sqrt{3}$.

Задание 18. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$|x^2 + a^2 - 6x - 4a| = 2x + 2a$$

имеет четыре различных корня.

Задание 19. На доске было написано несколько различных натуральных чисел. Эти числа разбили на три группы, в каждой из которых оказалось хотя бы одно число.

К каждому числу из первой группы приписали справа цифру 3, к каждому числу из второй группы - цифру 7, а числа из третьей группы оставили без изменений.

- а) Могла ли сумма всех этих чисел увеличиться в 8 раз?
- б) Могла ли сумма всех этих чисел увеличиться в 17 раз?
- в) В какое наибольшее число раз могла увеличиться сумма всех этих чисел?

Литература

1. Виленкин Н.Я., Ивашев-Мусатов О.С., Шварцбурд С.И.. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). Изд-во «Мнемозина».
2. Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В., Ткачева М.В. и др. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). Изд-во «Мнемозина».
3. Мордкович А.Г., Семенов П.В. Алгебра и начала математического анализа (профильный уровень). Изд-во «Мнемозина».
4. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия (базовый и профильный уровни). Изд-во «Просвещение».
5. Погорелов А.В. Геометрия (базовый и профильный уровни). Изд-во «Просвещение».
6. Потоскуев Е.В., Звавич Л.И. Геометрия (профильный уровень). Изд-во «Дрофа».
7. Черкасов О.Ю., Якушев А.Г. Математика: Справочник для старшеклассников и поступающих в вузы. М.: АСТ-ПРЕСС ШКОЛА.
8. Кравцев С.В. и др. Методы решения задач по алгебре: от простых до самых сложных. М.: Изд-во «Экзамен».
9. Козко А.И., Чирский В.Г. Задачи с параметром и другие сложные задачи. М.: МЦНМО.
10. Колесникова С.И. Математика. Решение сложных задач Единого государственного экзамена. М.: Айрис-пресс.
11. Шарыгин И.Ф. Математика для поступающих в вузы: учебное пособие. М.: Изд-во «Дрофа».
12. Прасолов В.В., Шарыгин И.Ф. Задачи по стереометрии. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.
13. Изучение сложных тем курса алгебры в средней школе: Учебно-методические материалы по математике / под. редакцией Фальке Л.Я.- М.: Илекса; Ставрополь: Сервисшкола, 2002

14. Тригонометрические функции, уравнения и неравенства: учебное пособие. Новиков А.И. Издательство: ФИЗМАТЛИТ, 2010. <http://www.knigafund.ru>

15. Элементарная математика. Часть 1: Теория чисел. Алгебра: Учебное пособие. Хорошилова Е.В. Издательство: Издательство МГУ, 2010 <http://www.kniuafund.ru>