

Рабочий лист №1

Дата " 6 " сентября 20 25 г.
(заполняется оргкомитетом)

Шифр ПМ-2
(заполняется оргкомитетом)

Оценка работы

(таблица заполняется по итогам проверки работы членами жюри олимпиады)

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Итого (итоговый балл, подпись председателя жюри)
Балл	5	10	10	0	15	20	15									75
№ задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Балл																

Магистратуры

(название олимпиады, заполняется участником)

Прикладная математика

(профиль олимпиады, заполняется участником)

$$\textcircled{3}. \det(A^{2024} + A^{2025}) = \det(A^{2024}(E + A)) = \det(A^{2024}) \cdot \det(E + A) = \\ = \det^{2024}(A) \cdot \det(E + A) = 1^{2024} \cdot 10 = 1 \cdot 10 = 10$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

$$E + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \det(E + A) = 2 \cdot 3 \cdot 2 - 2 = 10$$

Отв.: 10.

$$\textcircled{6}. \begin{cases} X^{x+y} = y^{x-y} \\ x^2 y = 1 \end{cases}, \begin{cases} X^{x+x^{-2}} = (x^{-2})^{x-x^{-2}} \\ y = \frac{1}{x^2} \end{cases}, \begin{cases} X^{x+x^{-2}} = X^{2x^{-2}-2x} \\ y = \frac{1}{x^2} \end{cases}$$

$$1) X + X^{-2} = 0$$

$$X = -\frac{1}{x^2}$$

$$X^3 = -1 \Rightarrow X = -1$$

$$y = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{1} = 1$$

$$2) X - y = X - \frac{1}{x^2} = 0$$

$$X = \frac{1}{x^2}$$

$$X^3 = 1 \Rightarrow X = 1$$

$$y = \frac{1}{x^2} = 1$$

$$\begin{cases} (-1)^0 = 1^{-2} \Rightarrow 1 = 1 \\ (-1)^2 \cdot 1 = 1 \Rightarrow 1 = 1 \end{cases}$$

$$(x, y) = (-1, 1) - \text{реш.е сист.}$$

$$\begin{cases} 1^2 = 1^0 \Rightarrow 1 = 1 \\ 1^2 \cdot 1 = 1 \Rightarrow 1 = 1 \end{cases}$$

$$(x, y) = (1, 1) - \text{реш.е сист.}$$

$$3) \quad x^{x+x^{-2}} = x^{2x^{-2}-2x}$$

$$x + x^{-2} = 2x^{-2} - 2x$$

$$3x = x^{-2}$$

$$3x = \frac{1}{x^2}$$

$$3x^3 = 1 \Rightarrow x^3 = \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

$$y = \frac{1}{x^2} = 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{9}$$

$$(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \sqrt[3]{9} \right) \text{ — реш. сист.}$$

$x = 1$ макс. знач-е

$$\text{Пара } (x, y) = (1, 1) \rightarrow x + y = 1 + 1 = 2.$$

Омб. 2.

$$\begin{aligned} ④. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}} - \sqrt{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \left(\sqrt{1 + \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}} - 1 \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \cdot (1 - 1) = 0. \end{aligned}$$

Омб.: 0.

$$①. \quad P = \lim_{x \rightarrow 0} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^3} \int_0^x \sin(t^2) dt =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^3} \cdot 0 = 0.$$

$$\int_0^x \sin t^2 dt = 0$$

Омб.: 0.

$$②. \quad x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{3x_n}{1+x_n}$$

$$x_2 = \frac{3x_1}{1+x_1} = \frac{3}{2}$$

$$x_3 = \frac{3x_2}{1+x_2} = \frac{3 \cdot \frac{3}{2}}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{9}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{9}{5}$$

$$x_4 = \frac{3x_3}{1+x_3} = \frac{3 \cdot \frac{9}{5}}{1 + \frac{9}{5}} = \frac{27}{5} \cdot \frac{5}{14} = \frac{27}{14} \dots$$

$$x_5 = \frac{3x_4}{1+x_4} = \frac{3 \cdot \frac{27}{14}}{1 + \frac{27}{14}} = \frac{81}{14} \cdot \frac{14}{41} = \frac{81}{41} \rightarrow 2$$

Дополнительный рабочий лист
(без рабочего листа №1 недействителен)

Дата "6" февраля 2025 г.
(заполняется участником)

Шифр ПМ-2
(заполняется участником)

2. (продолжение)

$$x_{n+1} = \frac{3x_n}{1+x_n} = 3 \left(\frac{x_n}{1+x_n} \right) = 3 \left(\frac{x_n + 1 - 1}{x_n + 1} \right) = 3 \left(1 - \frac{1}{1+x_n} \right)$$

$$x_1 = 1: \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{1}{1+\frac{3}{5}} = \frac{1}{8/5} = \frac{5}{8}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x_n} \rightarrow \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3 \left(1 - \frac{1}{3} \right) = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2.$$

Отв.: 2.

5. $y' = 2x + 1 - \cos(y - x^2)$ $y(1) = 1$

Возложим замену $u(x) = y(x) - x^2$

$$u' = y' - 2x$$

Подставив в исход. ур-е, получим:

$$u' + 2x = 2x + 1 - \cos u \Rightarrow u' = 1 - \cos u$$

Нач. условия: $u(1) = y(1) - 1^2 = 1 - 1 = 0$

$$1 - \cos 0 = 1 - 1 = 0 \quad \text{верно} \Rightarrow u(x) \equiv 0 \quad \forall x.$$

т.е. $y(x) = u(x) + x^2 = x^2$

Проверим нач. условия: $y(1) = 1^2 = 1$

Тогда $y(2) = 2^2 = 4.$

Отв.: 4.

$$7. \quad P = \prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) \quad \text{при } x = \frac{\pi}{2}$$

~~$$P = \cos \frac{\pi}{2} \cdot \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{16} \cdot \dots$$~~

Используем формулу: ~~$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$~~ ~~$\cos x = \frac{\sin 2x}{2 \sin x}$~~ ~~$\cos \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{2 \sin \frac{x}{2}}$~~

$$P = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{8}\right) + \dots = \dots$$

$$P = \prod_{k=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

Если $\pi = 3$, то $P = \frac{2}{3} \approx 0,66$

Отв.: 0,66.