

Рабочий лист №1

Дата " 6 " февраля 2025 г.
(заполняется оргкомитетом)

Шифр ПМ-17
(заполняется оргкомитетом)

Оценка работы

(таблица заполняется по итогам проверки работы членами жюри олимпиады)

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Итого (итоговый балл, подпись председателя жюри)
Балл	10	10	10	15	15	20	15									95
№ задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Балл																

Магистратура

(название олимпиады, заполняется участником)

Триггерное математика

(профиль олимпиады, заполняется участником)

Задание №1. $p = \lim_{x \rightarrow 0} y(x)$, $y(x) = \frac{3}{x^3} \int_0^x \sin(t^2) dt$

Используем разложение в ряд Тейлора $\sin(t^2)$,

$$\sin(t^2) = t^2 - \frac{t^6}{6} + o(t^6)$$

Интегрируем почленно:

$$\int_0^x \sin(t^2) dt = \int_0^x \left(t^2 - \frac{t^6}{6} + \dots \right) dt = \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{42} + o(x^7)$$

Подставим в выражение для $y(x)$.

$$y(x) = \frac{3}{x^3} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{42} + \dots \right) = 1 - \frac{x^4}{14} + \dots$$

При $x \rightarrow 0$ все слагаемые, кроме 1, стремятся к 0, поэтому $p = \lim_{x \rightarrow 0} y(x) = 1$

~~Задание №1.~~

продолжение на обороте

Сдано: 4 листа

Проверим правило Лопиталя:

$$\rho = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \int_0^x \sin(t^2) dt}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin(x^2)}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x^2} = 1.$$

Ответ: 1.

Задача №2 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, если $x_1 = 1$ и $x_{n+1} = \frac{3x_n}{1+x_n}$,
 $n = 1, 2, \dots$

Пусть посл-ть x_n сходится к некоторому пределу L , т.е.

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$, тогда подставив L в рекуррентное соотношение, получим:

$$L = \frac{3L}{1+L} \quad (*)$$

Решим (*):

$$L(1+L) = 3L \Leftrightarrow L + L^2 = 3L \Leftrightarrow L^2 - 2L = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow L(L-2) = 0 \Rightarrow L = 0 \text{ или } L = 2.$$

Но $x_1 = 1$ и все последующие члены посл-ти положительны \Rightarrow предел $L = 0$ не пройдет, значит $L = 2$.

Для проверки устойчивости предела, рассмотрим ф-ю $f(x) = \frac{3x}{1+x}$

Найдем производную $f'(x) = \frac{3(1+x) - 3x}{(1+x)^2} = \frac{3}{(1+x)^2}$
При $x = 2$:

$$f'(2) = \frac{3}{(1+2)^2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} < 1$$

Т.к. $|f'(2)| < 1$, предел $L = 2$ — устойчивый.

Т.о., $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$. Ответ: 2

Дополнительный рабочий лист
(без рабочего листа №1 недействителен)

Дата "6" февраля 2025 г.
(заполняется участником)

Шифр ПМ-17
(заполняется участником)

Задание №3. $\det(A^{2024} + A^{2025})$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Вспользуемся св-вами определителей:

$$\begin{aligned} \det(A^{2024} + A^{2025}) &= \det(A^{2024}(E + A)) = \\ &= \det(A^{2024}) \cdot \det(E + A) = (\det(A))^{2024} \cdot \det(E + A) \end{aligned}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

$$\det(E + A) = \begin{vmatrix} 1+1 & 1 & 0 \\ 1 & 2+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10$$

$$\text{Т.о., } \det(A^{2024} + A^{2025}) = 1^{2024} \cdot 10 = 10$$

Ответ: 10.

Задание №6. $x + y$, $x - \max$, (x, y) - реш-е сис-мы:

$$\begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y} \\ x^2 y = 1 \end{cases}$$

Внеся в 2-ю ур-е, что $x \neq 0$, $y \neq 0$ и

$$y = \frac{1}{x^2}$$

↑
продолжение на обороте

Перепишем его в 1-е ур-е:

$$x^{x + \frac{1}{x^2}} = x^{-2(x - \frac{1}{x^2})}$$

Перенесем обе части ур-е на $x^{-2(x - \frac{1}{x^2})}$, получим:

$$x^{3x - \frac{1}{x^2}} = 1$$

Отсюда следует, что либо $x = 1$, либо $3x - \frac{1}{x^2} = 0$.

Решим это ур-е:

$$3x = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow 3x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 3^{-1/3} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$$

Т.о., получили реш-е $x_1 = 1, y_1 = 1$ ($\frac{1}{1^2} = 1$) и $x_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}, y_2 = \sqrt[3]{3^2}$.

Максимальное значение $x = x_1 = 1 \Rightarrow$

$$x + y = 1 + 1 = 2$$

Ответ: 2

~~Задача N7. $x = \sqrt{1 + \cos(2x)}$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$~~

Задача N4. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x})$

Обозначим $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$, тогда необход. найти $\lim_{x \rightarrow \infty} (y - \sqrt{x})$.

Заметим, что $y \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$, т.к. подкоренное выражение растет вместе с x .

Упростим вычисл-е предела, воспользуясь рационализацией: умножим и разделим выражение $(y - \sqrt{x})$ на сопряженное ему выражение $(y + \sqrt{x})$:

$$y - \sqrt{x} = \frac{(y - \sqrt{x})(y + \sqrt{x})}{(y + \sqrt{x})} = \frac{y^2 - x}{y + \sqrt{x}} \quad (**)$$

Дополнительный рабочий лист
(без рабочего листа №1 недействителен)

Дата "6" февраля 2025 г.
(заполняется участником)

Шифр ПМ-17
(заполняется участником)

Необходимо 1) вычислить $y^2 - x$ и 2) проанализ. поведение зн. $y + \sqrt{x}$ при $x \rightarrow \infty$.

1) Т.к. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$, поэтому $y^2 = x + \sqrt{x + \sqrt{x}}$
 $\Rightarrow y^2 - x = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

Представим в (**), получим:

$$y - \sqrt{x} = \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{y + \sqrt{x}}$$

2) Асимптотика

Числитель $\sqrt{x + \sqrt{x}}$, при $x \rightarrow \infty$ основной вклад даёт \sqrt{x} , поэтому $\sqrt{x + \sqrt{x}} \sim \sqrt{x}$

Знаменатель $y + \sqrt{x}$, т.к. $y \sim \sqrt{x}$ при $x \rightarrow \infty$, то $y + \sqrt{x} \sim 2\sqrt{x}$

Т.о., получаем: $y - \sqrt{x} \sim \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} = 0,5$

Ответ: ~~1/2~~ 0,5.

Задание №5. $y(2)$, если $y(x)$ — реш-е з. Коши:

$$y' = 2x + 1 - \cos(y - x^2), \quad y(1) = 1$$

Заменим $u = y - x^2$, при этом преобразуем y выражение как: $y = u + 2x$

Представим в лев-е ур-е, получим:

$$u + 2x = 2x + 1 - \cos(u)$$

Упрощаем и получаем:

↑
предопределен
на отрезке

$$u = 1 - \cos(u)$$

Это ур-е можно проклассифицировать как ур-е с разделяющимися переменными.

Разделив переменные и интегрируя, получаем:

$$\int \frac{du}{1 - \cos(u)} = \int dx$$

Исп-е тригонометрическое тожд-во

$$1 - \cos(u) = 2 \sin^2\left(\frac{u}{2}\right), \text{ получим:}$$

$$\int \frac{du}{2 \sin^2\left(\frac{u}{2}\right)} = \int dx$$

$$\int \frac{du}{2 \sin^2\left(\frac{u}{2}\right)} = -\operatorname{ctg}\left(\frac{u}{2}\right) + C$$

$$\int dx = x + C$$

$$\text{Т.о., получаем: } -\operatorname{ctg}\left(\frac{u}{2}\right) = x + C$$

$$\text{Исп-е нач усл-е } y(1) = 1, \text{ найдем } u(1) = 1 - 1^2 = 0$$

Подстановка $u = 0$ и $x = 1$ приводит к особен-ти, т.к. $\operatorname{ctg}(0)$ не определен, однако проверка показывает, что реш-е $u(x) = 0$ удовлетв. нач усл-ю и ур-ю $u = 1 - \cos(u)$.

След-но, $y(x) = x^2$ - реш-е задачи Коши, а значит $y(2) = 2^2 = 4$.

Ответ: 4

Задача 17. $p = \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{x}{2^k}\right), \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad n = 3$

~~17. k=1 до 3 включительно / $\pi/2$ / $\pi/2$ / $\pi/4$ / $\pi/8$ / $\pi/16$ / $\pi/32$ / $\pi/64$ / $\pi/128$ / $\pi/256$ / $\pi/512$ / $\pi/1024$ / $\pi/2048$ / $\pi/4096$ / $\pi/8192$ / $\pi/16384$ / $\pi/32768$ / $\pi/65536$ / $\pi/131072$ / $\pi/262144$ / $\pi/524288$ / $\pi/1048576$ / $\pi/2097152$ / $\pi/4194304$ / $\pi/8388608$ / $\pi/16777216$ / $\pi/33554432$ / $\pi/67108864$ / $\pi/134217728$ / $\pi/268435456$ / $\pi/536870912$ / $\pi/1073741824$ / $\pi/2147483648$ / $\pi/4294967296$ / $\pi/8589934592$ / $\pi/17179869184$ / $\pi/34359738368$ / $\pi/68719476736$ / $\pi/137438953472$ / $\pi/274877906944$ / $\pi/549755813888$ / $\pi/1099511627776$ / $\pi/2199023255552$ / $\pi/4398046511104$ / $\pi/8796093022208$ / $\pi/17592186044416$ / $\pi/35184372088832$ / $\pi/70368744177664$ / $\pi/140737488355328$ / $\pi/281474976710656$ / $\pi/562949953421312$ / $\pi/1125899906842624$ / $\pi/2251799813685248$ / $\pi/4503599627370496$ / $\pi/9007199254740992$ / $\pi/18014398509481984$ / $\pi/36028797018963968$ / $\pi/72057594037927936$ / $\pi/144115188075855872$ / $\pi/288230376151711744$ / $\pi/576460752303423488$ / $\pi/1152921504606846976$ / $\pi/2305843009213693952$ / $\pi/4611686018427387904$ / $\pi/9223372036854775808$ / $\pi/18446744073709551616$ / $\pi/36893488147419103232$ / $\pi/73786976294838206464$ / $\pi/147573952589676412928$ / $\pi/295147905179352825856$ / $\pi/590295810358705651712$ / $\pi/1180591620717411303424$ / $\pi/2361183241434822606848$ / $\pi/4722366482869645213696$ / $\pi/9444732965739290427392$ / $\pi/18889465931478580854784$ / $\pi/37778931862957161709568$ / $\pi/75557863725914323419136$ / $\pi/151115727451828646838272$ / $\pi/302231454903657293676544$ / $\pi/604462909807314587353088$ / $\pi/1208925819614629174706176$ / $\pi/2417851639229258349412352$ / $\pi/4835703278458516698824704$ / $\pi/9671406556917033397649408$ / $\pi/19342813113834066795298816$ / $\pi/38685626227668133590597632$ / $\pi/77371252455336267181195264$ / $\pi/154742504910672534362390528$ / $\pi/309485009821345068724781056$ / $\pi/618970019642690137449562112$ / $\pi/1237940039285380274899124224$ / $\pi/2475880078570760549798248448$ / $\pi/4951760157141521099596496896$ / $\pi/9903520314283042199192993792$ / $\pi/19807040628566084398385987584$ / $\pi/39614081257132168796771975168$ / $\pi/79228162514264337593543950336$ / $\pi/158456325028528675187087900672$ / $\pi/316912650057057350374175801344$ / $\pi/633825300114114700748351602688$ / $\pi/1267650600228229401496703205376$ / $\pi/2535301200456458802993406410752$ / $\pi/5070602400912917605986812821504$ / $\pi/10141204801825835211973625643008$ / $\pi/20282409603651670423947251286016$ / $\pi/40564819207303340847894502572032$ / $\pi/81129638414606681695789005144064$ / $\pi/162259276829213363391578010288128$ / $\pi/324518553658426726783156020576256$ / $\pi/649037107316853453566312041152512$ / $\pi/1298074214633706907132624082305024$ / $\pi/2596148429267413814265248164610048$ / $\pi/5192296858534827628530496329220096$ / $\pi/10384593717069655257060992658440192$ / $\pi/20769187434139310514121985316880384$ / $\pi/41538374868278621028243970633760768$ / $\pi/83076749736557242056487941267521536$ / $\pi/166153499473114484112975882535043072$ / $\pi/332306998946228968225951765070086144$ / $\pi/664613997892457936451903530140172288$ / $\pi/1329227995784915872903807060280344576$ / $\pi/2658455991569831745807614120560689152$ / $\pi/5316911983139663491615228241121378304$ / $\pi/10633823966279326983230456482242756608$ / $\pi/21267647932558653966460912964485513216$ / $\pi/42535295865117307932921825928971026432$ / $\pi/85070591730234615865843651857942052864$ / $\pi/170141183460469231731687303715884105728$ / $\pi/340282366920938463463374607431768211456$ / $\pi/680564733841876926926749214863536422912$ / $\pi/1361129467683753853853498429727072845824$ / $\pi/2722258935367507707706996859454145691648$ / $\pi/5444517870735015415413993718908291383296$ / $\pi/10889035741470030830827987437816582766592$ / $\pi/21778071482940061661655974875633165533184$ / $\pi/43556142965880123323311949751266331066368$ / $\pi/87112285931760246646623899502532662132736$ / $\pi/174224571863520493293247799005065324265472$ / $\pi/348449143727040986586495598010130648530944$ / $\pi/696898287454081973172991196020261297061888$ / $\pi/1393796574908163946345982392040522594123776$ / $\pi/2787593149816327892691964784081045188247552$ / $\pi/5575186299632655785383929568162090376495104$ / $\pi/11150372599265311570767859136324180752990208$ / $\pi/22300745198530623141535718272648361505980416$ / $\pi/44601490397061246283071436545296723011960832$ / $\pi/89202980794122492566142873090593446023921664$ / $\pi/178405961588244985132285746181186892047843328$ / $\pi/356811923176489970264571492362373784095686656$ / $\pi/713623846352979940529142984724747568191373312$ / $\pi/1427247692705959881058285969449495136382746624$ / $\pi/2854495385411919762116571938898990272765493248$ / $\pi/5708990770823839524233143877797980545530986496$ / $\pi/11417981541647679048466287755595961091061972992$ / $\pi/22835963083295358096932575511191922182123945984$ / $\pi/45671926166590716193865151022383844364247891968$ / $\pi/91343852333181432387730302044767688728495783936$ / $\pi/182687704666362864775460604089535377456991567872$ / $\pi/365375409332725729550921208179070754913983135744$ / $\pi/730750818665451459101842416358141509827966271488$ / $\pi/1461501637330902918203684832716283019655932542976$ / $\pi/2923003274661805836407369665432566039311865085952$ / $\pi/5846006549323611672814739330865132078623730171904$ / $\pi/11692013098647223345629478661730264157247460343808$ / $\pi/23384026197294446691258957323460528314494920687616$ / $\pi/46768052394588893382517914646921056628989841375232$ / $\pi/93536104789177786765035829293842113257979682750464$ / $\pi/187072209578355573530071658587684226515959365500928$ / $\pi/374144419156711147060143317175368453031918731001856$ / $\pi/748288838313422294120286634350736906063837462003712$ / $\pi/1496577676626844588240573268701473812127674924007424$ / $\pi/2993155353253689176481146537402947624255349848014848$ / $\pi/5986310706507378352962293074805895248510699696029696$ / $\pi/11972621413014756705924586149611790497021399392059392$ / $\pi/23945242826029513411849172299223580994042798784118784$ / $\pi/47890485652059026823698344598447161988085597568237568$ / $\pi/95780971304118053647396689196894323976171195136475136$ / $\pi/191561942608236107294793378393788647952342390272950272$ / $\pi/383123885216472214589586756787577295904684780545900544$ / $\pi/766247770432944429179173513575154591809369561091801088$ / $\pi/1532495540865888858358347027150309183618739122183602176$ / $\pi/3064991081731777716716694054300618367237478244367204352$ / $\pi/6129982163463555433433388108601236734474956488734408704$ / $\pi/12259964326927110866866776217202473468949912977468817408$ / $\pi/24519928653854221733733552434404946937899825954937634816$ / $\pi/49039857307708443467467104868809893875799651909875269632$ / $\pi/98079714615416886934934209737619787751599303819750539264$ / $\pi/196159429230833773869868419475239575503198607639501078528$ / $\pi/392318858461667547739736838950479151006397215279002157056$ / $\pi/784637716923335095479473677900958302012794430558004314112$ / $\pi/1569275433846670190958947355801916604025588861116008628224$ / $\pi/3138550867693340381917894711603833208051177722232017256448$ / $\pi/6277101735386680763835789423207666416102355444464034512896$ / $\pi/12554203470773361527671578846415332832204710888928069025792$ / $\pi/25108406941546723055343157692830665664409421777856138051584$ / $\pi/50216813883093446110686315385661331328818843555712276103168$ / $\pi/100433627766186892221372630771322662657637687111424552206336$ / $\pi/200867255532373784442745261542645325315275374222849104412672$ / $\pi/401734511064747568885490523085290650630550748445698208825344$ / $\pi/803469022129495137770981046170581301261101496891396417650688$ / $\pi/1606938044258990275541962092341162602522202993782792835301376$ / $\pi/3213876088517980551083924184682325205044405987565585670602752$ / $\pi/6427752177035961102167848369364650410088811975131171341205504$ / $\pi/12855504354071922204335696738729300820177623950262342682411008$ / $\pi/25711008708143844408671393477458601640355247900524685364822016$ / $\pi/51422017416287688817342786954917203280710495801049370729644032$ / $\pi/102844034832575377634685573909834406561420991602098741459288064$ / $\pi/205688069665150755269371147819668813122841983204197482918576128$ / $\pi/411376139330301510538742295639337626245683966408394965837152256$ / $\pi/822752278660603021077484591278675252491367932816789931674304512$ / $\pi/1645504557321206042154969182557350504982735865633579863348609024$ / $\pi/3291009114642412084309938365114701009965471731267159726697218048$ / $\pi/6582018229284824168619876730229402019930943462534319453394436096$ / $\pi/13164036458569648337239753460458804039861886925068638906788872192$ / $\pi/26328072917139296674479506920917608079723773850137277813577744384$ / $\pi/52656145834278593348959013841835216159447547700274555627155488768$ / $\pi/105312291668557186697918027683670432318895095400549111254310977536$ / $\pi/210624583337114373395836055367340864637790190801098222508621955072$ / $\pi/421249166674228746791672110734681729275580381602196445017243910144$ / $\pi/842498333348457493583344221469363458551160763204392890034487820288$ / $\pi/1684996666696914987166688442938726917102321526408785780068975640576$ / $\pi/3369993333393829974333376885877453834204643052817571560137951281152$ / $\pi/6739986666787659948666753771754907668409286105635143120275902562304$ / $\pi/13479973333575319897333507543509815336818572211270286240551805124608$ / $\pi/26959946667150639794667015087019630673637144422540572481103610249216$ / $\pi/53919893334301279589334030174039261347274288845081144962207220498432$ / $\pi/107839786668602559178668060348078522694548577690162289924414440996864$ / $\pi/215679573337205118357336120696157045389097155380324579848828881993728$ / $\pi/431359146674410236714672241392314090778194310760649159697657763987456$ / $\pi/862718293348820473429344482784628181556388621521298319395315527974912$ / $\pi/1725436586697640946858688965569256363112777243042596638790631055949824$ / $\pi/3450873173395281893717377931138512726225554486085193277581262111899648$ / $\pi/6901746346790563787434755862277025452451108972170386555162524223799296$ / $\pi/13803492693581127574869511724554050904902217944340773110325048447598592$ / $\pi/27606985387162255149739023449108101809804435888681546220650096895197184$ / $\pi/55213970774324510299478046898216203619608871777363092441300193790394368$ / $\pi/110427941548649020598956093796432407239217743554726184882600387580788736$ / $\pi/220855883097298041197912187592864814478435487109452369765200775161577472$ / $\pi/441711766194596082395824375185729628956870974218904739530401550323154944$ / $\pi/883423532389192164791648750371459257913741948437809479060803100646309888$ / $\pi/1766847064778384329583297500742918515827483896875618958121606201292619776$ / $\pi/3533694129556768659166595001485837031654967793751237916243212402585239552$ / $\pi/7067388259113537318333190002971674063309935587502475832486424805170479104$ / $\pi/14134776518227074636666380005943348126619871175004951664972849610340958208$ / $\pi/2826955303645414927333276001188669625323974235$~~

Дополнительный рабочий лист
(без рабочего листа №1 недействителен)

Дата "6" февраля 2025 г.
(заполняется участником)

Шифр ПМ-17
(заполняется участником)

Воспользуемся формулой бесконечного произведения косинусов:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin(x)}{x}$$

Т.к. по усл-ю задачи $x = \frac{\pi}{2}$, подставим его в формулу:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2 \cdot 2^k}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}}$$

Т.к. $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, получаем:

$$P = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \stackrel{\{\pi \approx 3\}}{=} \frac{2}{3} \approx 0,66$$

Ответ: 0,66.