

Рабочий лист №1

Дата "6" февраля 2025 г.  
(заполняется оргкомитетом)

Шифр ПМ-6  
(заполняется оргкомитетом)

Оценка работы

(таблица заполняется по итогам проверки работы членами жюри олимпиады)

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Итого (итоговый балл, подпись председателя жюри)
Балл	10	10	10	15	15	20	0									80
№ задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Балл																

Магистратура

(название олимпиады, заполняется участником)

Прикладная математика

(профиль олимпиады, заполняется участником)

$$③ \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A^{2024} + A^{2025}) = \det(A^{2024}(E + A)) = \det A^{2024} \cdot \det(E + A) =$$

$$= (\det A)^{2024} \cdot \det(E + A)$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \Rightarrow (\det A)^{2024} = 1$$

$$\det(E + A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10$$

$$\Rightarrow (\det A)^{2024} \cdot \det(E + A) = 1 \cdot 10 = 10$$

Ответ: 10

$$⑥ \quad \begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y} \\ x^2 y = 1 \end{cases} \quad - \text{из } 2-й \text{ ур-на} \Rightarrow x \neq 0, y \neq 0, y = \frac{1}{x^2}$$

$$x^{x+\frac{1}{x^2}} = \left(\frac{1}{x^2}\right)^{x-\frac{1}{x^2}} \quad \left| \cdot x^2 \left(x - \frac{1}{x^2}\right) \right. \Rightarrow \left. \begin{aligned} &x=1 \text{ или } 3x - \frac{1}{x^2} = 0 \\ &x=1 \text{ или } x = \sqrt[3]{\frac{1}{3}} \quad (y = 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2}) \end{aligned} \right.$$

$$x^{2x - \frac{2}{x^2}} + x + \frac{1}{x^2} = 1$$

$$x^{3x - \frac{1}{x^2}} = 1$$

т.к.  $1 > \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ , то  
при  $x=1 \quad y=1$  и  $x+y=2$

Ответ: 2

Сдано 2 места

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^3} \int_0^x \sin(t^2) dt = \left| \frac{\sin(t^2) \sim t^2}{\text{при } t \rightarrow 0} \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^3} \cdot \frac{x^3}{3} = 1 \quad \text{Ответ: } 1$$

$$\textcircled{2} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{3x_n}{1+x_n}$$

$$x_{n+2} = \frac{3x_{n+1}}{1+x_{n+1}} = \frac{3 \cdot \frac{3x_n}{1+x_n}}{1 + \frac{3x_n}{1+x_n}} = \frac{9x_n}{1+4x_n}$$

$$x_{n+3} = \frac{3x_{n+2}}{1+x_{n+2}} = \frac{3 \cdot \frac{9}{1+4x_n}}{1 + \frac{9}{1+4x_n}} = \frac{27x_n}{1+13x_n}$$

и т.д.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2 \quad \text{Ответ: } 2$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}) = \left| \cdot \cdot \cdot \right| \text{ на сопряженное } \left| \cdot \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sqrt{x + \sqrt{x}} - x}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} = \left| \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}} \sim x^{1/2}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x} \sim 2x^{1/2}} \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1/2}}{2x^{1/2}} = \frac{1}{2}$$

Ответ:  $1/2$

⑤ Найти  $y(x)$ ,  $y(x)$  - пар-е

$$y' = 2x + 1 - \cos(y - x^2), y(1) = 1$$

Прогнозируем  $y(x)$  в виде ряда Тейлора

$$y(x) = \frac{y(1) + y'(1)}{1} (x-1) + \frac{y''(1)}{2!} (x-1)^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(1)}{n!} (x-1)^n$$

Найдем

$$y'(1) = 2 + 1 - \cos(1-1) = 2$$

$$y''(1) = 2 + \sin(y - x^2) \cdot 2x = 2 + \sin(1-1) \cdot 2 = 2$$

Прогнозируем, найдем  $y^{(k)}(1) = 0 \quad \forall k \geq 3$

Дополнительный рабочий лист  
(без рабочего листа №1 недействителен)

Дата " 6 " февраля 2025 г.  
(заполняется участником)

Шифр ПМ-6  
(заполняется участником)

Таким образом ряд Тейлора

$$y(x) = y(1) + y'(1)(x-1) + \frac{y''(1)}{2}(x-1)^2$$

$$y(2) = 2(2-1) + \frac{2}{2}(2-1)^2 + 1 = 4$$

Ответ: 4