

Рабочий лист №1

Дата "28" января 2025 г.
(заполняется оргкомитетом)

Шифр M-2
(заполняется оргкомитетом)

Оценка работы

(таблица заполняется по итогам проверки работы членами жюри олимпиады)

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Итого (итоговый балл, подпись председателя жюри)
Балл																
№ задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Балл																

Математика

(название олимпиады, заполняется участником)

математика

(профиль олимпиады, заполняется участником)

$$1. \frac{1}{\pi} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \quad \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r$$

$$x^2 + y^2 = r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r^2 \leq 1 \quad 0 \leq r \leq 1 \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{2r dr}{2\sqrt{1-r^2}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{dr^2}{(1-r^2)^{1/2}} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{d(1-r^2)}{(1-r^2)^{1/2}} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2(1-r^2)^{-1/2} \Big|_0^1 d\varphi = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -2 d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$\Rightarrow (2)$$

$$= \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

$$3. y'' + 2y' + y = 0 \quad y(0) = 1 \quad y(1) = 0$$

$$p^2 + 2p + 1 = 0$$

$$D = 4 - 4 = 0 \quad p_1 = p_2 = -\frac{2}{2} = -1$$

$$y(1) = C_1 e^{-1} + C_2 e^{-1} = 0$$

$$C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = -C_2$$

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-t}$$

$$y(0) = C_1 + C_2 = 1$$

$$2C_1 = -1 \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{2} \quad C_2 = 1$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} e^{-t} + e^{-t}$$

$$y'(t) = -e^{-t} - e^{-t}t + e^{-t} = -e^{-t}t$$

$$y''(t) = e^{-t}t - e^{-t} \quad y''(0) = -1 \Rightarrow (3)$$

2. ① parv. cos

$$f(x) = (x^3 + x^2 + x + 1) \sin x = u \cdot v$$

$$f' = (3x^2 + 2x + 1) \sin x + (x^3 + x^2 + x + 1) \cos x$$

$$f'' = (6x + 2) \sin x + (3x^2 + 2x + 1) \cos x + (3x^2 + 2x + 1) \cos x - (x^3 + x^2 + x + 1) \sin x$$

$$f''' = 6 \sin x + (6x + 2) \cos x + (6x + 2) \cos x - (3x^2 + 2x + 1) \sin x + (6x + 2) \cos x - (3x^2 + 2x + 1) \sin x - (x^3 + x^2 + x + 1) \cos x$$

$$u = x^3 + x^2 + x + 1 \quad u' = 3x^2 + 2x + 1 \quad u'' = 6x + 2 \quad u''' = 6 \quad u^{(4)} = 0$$

$$f^{(100)} = C_{100}^0 u^{(100)} v + C_{100}^1 u^{(99)} v^{(1)} + C_{100}^2 u^{(98)} v^{(2)} + \dots + C_{100}^{97} u^{(3)} v^{(97)} + C_{100}^{98} u^{(2)} v^{(98)} + C_{100}^{99} u^{(1)} v^{(99)} + C_{100}^{100} u \cdot v^{(100)}$$

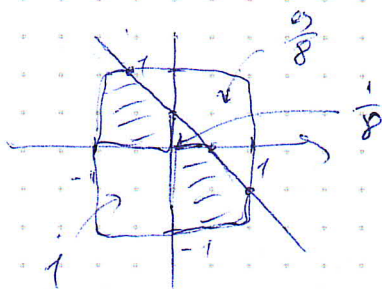
$$v = \sin x \quad v' = \cos x \quad v'' = -\sin x \quad v''' = -\cos x \quad v^{(4)} = \sin x$$

$$v^{(5)} = \cos x \quad v^{(6)} = -\sin x \quad v^{(7)} = -\cos x$$

$$f^{(100)}(0) = C_{100}^{97} 6 \cdot \cos 0 + C_{100}^{99} (3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1) \cos 0 = \frac{100!}{97! 3!} \cdot 6 - \frac{100!}{99!} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{3 \cdot 2} \cdot 6 - 100 = 980 + 100 \Rightarrow (2)$$

$$10. \int_{-1}^1 x^3 \frac{1}{2} dx = \frac{x^4}{10} \Big|_{-1}^1 = 0 \Rightarrow (4)$$

$$g_n S_{k6} = 4$$



$$4 - \frac{9}{8} - 1 - \frac{1}{8} =$$

$$= 3 - \frac{10}{8} = \frac{14}{8}$$

$$\frac{14}{8 \cdot 4} = \frac{7}{16} \Rightarrow (5)$$

$$B(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{if } x < 0 \\ 0 & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$$

M-2

- 1. 2
- 2. 1
- 3. 3
- 4. 3
- 5. 2
- 6. 6
- 7. 5
- 8. 3
- 9. 5
- 10. 4