

Рабочий лист №1

Дата "03" февраля 2025 г.
(заполняется оргкомитетом)

Шифр ИСТ-13
(заполняется оргкомитетом)

Оценка работы

(таблица заполняется по итогам проверки работы членами жюри олимпиады)

№ задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Итого (итоговый балл, подпись председателя жюри)
Балл																
№ задания	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	908.
Балл																

МАГИСТРИУМ

(название олимпиады, заполняется участником)

ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ И ТЕХНОЛОГИИ

(профиль олимпиады, заполняется участником)

Задача 1) Матрица A представлена в виде $A = C \cdot \Lambda \cdot C^{-1}$, когда она диагонализуется. Матрица A диагонализуется, когда λ собственные векторы матрицы A образуют базис n -ва, размер которого совпадает с размером матрицы A . Т.е. количество линейно независимых собственных векторов матрицы A равняется ее размеру. При этом матрица C - матрица составленная из соответственных векторов матрицы A , Λ - диагональная матрица, составленная из соответственных значений матрицы A .

Найдем собств. векторы и значения матрицы A :
Составим хар-ое уравне.

$$AX = \lambda X, X \neq 0$$

$$AX - \lambda X = 0$$

$$\Lambda E = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$(A - \Lambda E)X = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det(A - \Lambda E) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -4 & 4 \\ -3 & -5-\lambda & 3 \\ -5 & -10 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(-5-\lambda)(8-\lambda) + 60 + 120 + 20(-5-\lambda) + 30(-1-\lambda) - 12(8-\lambda) = (5+\lambda+5\lambda+\lambda^2)(8-\lambda) + 180 - 100 - 20\lambda - 30 - 30\lambda - 96 + 12\lambda = 40 - 5\lambda + 8\lambda - \lambda^2 + 40\lambda - 5\lambda^2 + 8\lambda^2 - \lambda^3 - 46 - 38\lambda = -6 + 5\lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3$$

$$-\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0 \cdot (-1)$$

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \quad (\text{свобод. член} = 6 \Rightarrow \text{возможн. корни } \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6)$$

Предположим, что корень $\lambda_1 = 1$, подставим:

$$1 - 2 - 5 + 6 = 0$$

$$0 = 0 \quad (\text{получили тождество}) \Rightarrow \lambda_1 = 1 - \text{корень}$$

Разложим многочлен:

$$\begin{array}{r} \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 : \lambda - 1 \\ \underline{-\lambda^3 + \lambda^2} \\ -\lambda^2 - 5\lambda + 6 \\ \underline{-\lambda^2 + \lambda} \\ -6\lambda + 6 \\ \underline{-6\lambda + 6} \\ 0 \end{array}$$

$$\text{Получили } (\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - 6) = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = -6 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -2 \\ \lambda_3 = 3 \end{cases} \quad \text{По т. Виета}$$

Получим след. ~~характеристическое~~ уравнение $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 3$

Найдем соотв. векторы:

1) для $\lambda_1 = 1$: $(A - 1 \cdot E) \cdot X_1 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} -1-1 & -4 & 4 \\ -3 & -5-1 & 3 \\ -5 & -10 & 8-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{Найдем решение через м.т. Гаусса.}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -4 & 4 & 0 \\ -3 & -6 & 3 & 0 \\ -5 & -10 & 7 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{:(-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ -3 & -6 & 3 & 0 \\ -5 & -10 & 7 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{+I \cdot 3 \\ +I \cdot 5}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-II}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{+(-3) \cdot I} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{+II \cdot 2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x_3, x_1 - \text{зав. перемен.} \\ x_2 - \text{своб.} \end{matrix} \quad \text{позьм } x_2 = 1, \text{ тогда } X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) для $\lambda_2 = -2$: $(A - (-2) \cdot E) \cdot X_2 = 0 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} -1+2 & -4 & 4 \\ -3 & -5+2 & 3 \\ -5 & -10 & 8+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{Найдем решение через м.т. Гаусса}$$

Дополнительный рабочий лист
(без рабочего листа №1 недействителен)

Дата "03" сентября 2025 г.
(заполняется участником)

Шифр 123
(заполняется участником)

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 & | & 0 \\ -3 & -5 & 3 & | & 0 \\ -5 & -10 & 10 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{+I \cdot 3 \\ +I \cdot 5}} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 & | & 0 \\ 0 & -15 & 15 & | & 0 \\ 0 & -30 & 30 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{:15 \\ :30}} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-II} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\#II \cdot 4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1, x_2 - \text{зав. переменные} \\ x_3 - \text{свободная переменная} \end{matrix} \quad \text{примем } x_3 = 1, \text{ тогда } x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3) для $\lambda_3 = 3$ $(A - 3 \cdot E) \cdot x_3 = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} -1-3 & -4 & 4 \\ -3 & -5-3 & 3 \\ -5 & -10 & 3-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{Найдем решение через метод Гаусса}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & -4 & 4 & | & 0 \\ -3 & -8 & 3 & | & 0 \\ -5 & -10 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-4)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ -3 & -8 & 3 & | & 0 \\ -5 & -10 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{+I \cdot 3 \\ +I \cdot 5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -5 & 0 & | & 0 \\ 0 & -5 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\#II} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -5 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & -5 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{:(-5)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-II} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_1, x_2 - \text{зав. переменные} \\ x_3 - \text{свободная переменная} \end{matrix} \quad \text{пусть } x_3 = 1 \Rightarrow x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Мы нашли 3 линейно независимых собственных вектора матрицы A , при чем размер матрицы A также равен 3 \Rightarrow

A диагонаizable, т.е. $A = C \cdot \Lambda \cdot C^{-1}$, причем

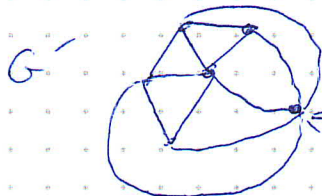
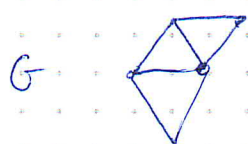
$$C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Задача 3) Колонию муравьёв можно представить виде плоского графа G , состоящего из треугольников, т.к. каждая ячейка построена из трех палочек.

Пример G из 3 ячеек



Попробуем сделать так, чтобы каждая грань графа G была ограничена тремя ребрами. Для этого добавим новую вершину и соединим ее со всеми вершинами, находящимися на границе графа G . Получим граф G' .



← нов. вершина

~~Новый граф~~ Можно заметить следующее. В графе G' каждая грань ограничена 3 ребрами, а каждое ребро принадлежит двум граням. Пусть n - кол-во ребер, g - кол-во граней, n - кол-во вершин. Тогда получим следующее соотношение:

$$3g = 2n \Rightarrow g = \frac{2}{3}n, \quad n = \frac{3}{2}g.$$

Т.к. граф G' - планарный, то можно воспользоваться ф. Эйлера:

$n - n + g = 2$. Учитывая соотношение получим:

$$n - n + \frac{2}{3}n = 2 \Rightarrow n = 3n - 6$$

$$\frac{1}{3}n = n - 2$$

$$n - \frac{3}{2}g + g = 2 \Rightarrow g = 2n - 4$$

$$\frac{1}{2}g = n - 2$$

Т.к. мы добавим одну вершину, то всего вершин 1201

Т.к. из новой вершины мы проведем ребра к вершинам границы, а всего в грани вершин 500 (т.к. 500 ячеек палочек), то добавилось 500 ребер.

Т.к. мы добавили 500 ребер, то добавилось $500n + 1$ внешних.

Найдем кол-во ребер n : $n = 3 \cdot 1201 - 6$. Так было добавлено 500 ребер, то кол-во палочек для построения $= 3597 - 500 = 3097$

Найдем кол-во граней g : $g = 2 \cdot 1201 - 4 = 2398$.

Так как было добавлено 501 грань, то получим кол-во ячеек

Дополнительный рабочий лист
(без рабочего листа №1 недействителен)

Дата "05" февраля 2025 г.
(заполняется участником)

Шифр 1001
(заполняется участником)

Кол-во ячеек $2398 - 501 = 1897$

Так в одной ячейке живет один муравей $\Rightarrow 1897$ муравьев

Ответ: 3097 палочек нужно для построения, 1897-муравьев живет.

Заг 4:

СОЛОВЕЙ

Нужно показать вер, что полученное слово 'СОЛ' - P(A)

$$P(A) = \frac{\text{кол-во диагональн. иск.} \rightarrow 2 \text{ (п.к. звездочки 0)}}{\text{кол-во всего иск.} \rightarrow 7 \cdot 6 \cdot 5 \text{ (размещение 3 трех букв из 7)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A) = \frac{2}{7 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{1}{105}$$

Ответ: $\frac{1}{105}$

Заг 2) $((K \wedge TL \wedge TN) \wedge (TL \xrightarrow{L \vee M} M)) \vee ((\neg K \vee L \vee M) \wedge (TL \wedge M))$
 $\wedge (K \vee N) = ?$

~~необходимо показать~~ $a = ((K \wedge TL \wedge TN) \wedge (L \vee M)) \vee$

$a = ((K \wedge TL \wedge TN) \wedge (L \vee M)) \vee ((\neg K \vee L \vee M) \wedge (TL \wedge M))$

$b = (K \vee N)$

Чтобы формула вып., необ. $a=1, b=1$

Чтобы $a=1 \Rightarrow$ ~~сложно~~ $c=0, d=1$ или $c=1, d=0$.

Рассмотрим $c=0, d=0$, тогда

$K=1, L=0, N=0, M=0 \Rightarrow$ форм. вып.

Рассмотрим $d=1, c=0$, тогда

$L=0, M=0, N=1, K=0$

$N=1, K=1$

~~$K=0, K=1$~~

$c=1, d=1$ в обоих
в эти случаи

Тогда получим три решения.

K	L	M	N
1	0	1	0
1	0	0	1
0	0	0	1

Задача 5) Пусть X матрица называется Tree, когда
узлы - N , а сходимость Родитель - P . Тогда следующий запрос выве-
дет бинарное дерево:

```
SELECT N AS 'Yser',
CASE
    WHEN P IS NULL THEN 'Kopeng'
    WHEN EXISTS (SELECT 1 FROM TreeAS t2 WHERE
        t2.P = t1.N) THEN 'Возвращение'
    ELSE 'Лист'
END AS 'Позиция' FROM TreeAS t1 ORDER BY N ASC.
```

3. ung e)

```
def get-spiral-matrix(n):
```

$$\text{matrix } X = []$$

for i in range(n):

$$\Gamma \cap W = \{ \}$$

```
for i in range(n):
```

row.append(0)

matrix.append(row)

~~7/1~~ ~~7/2~~ = 0

$$\text{top} = 0$$
$$\partial \partial w_n = n - 1$$
$$\ell \in J_t = 0$$
$$\text{right} = n - 1$$
$$\rho_{\text{air}} = 1$$

while top <= down and left <= right:

Дополнительный рабочий лист
(без рабочего листа №1 недействителен)

Дата "03" сентября 2025 г.
(заполняется участником)

Шифр 4434
(заполняется участником)

```
for i in range(left, right+1):
    matrix[top][i] = num
    num += 1
top += 1
for i in range(top, down+1):
    matrix[i][right] = num
    num += 1
right -= 1
for i in range(right, left-1, -1):
    matrix[down][i] = num
    num += 1
down -= 1
for i in range(left, down, top-1, -1):
    matrix[left][i]
    matrix[left][i] = num
    num += 1
left += 1
return matrix

def print_matrix(matrix):
    with open('output.txt', 'w') as f:
        for row in matrix:
            for elem in row:
                f.write(f"{elem:2} ")
            f.write("\n")
```



```
def main( ):
```

```
    n = int(input("Enter n"))
```

```
    matrix = get-spiral-matrix(n)
```

```
    print-matrix(matrix)
```

```
if __name__ == ma '__main__':
```

```
    main()
```