

Казанский (Приволжский) федеральный университет

Олимпиада «МагистриУм», очный тур

2024–2025 учебный год

**Институт вычислительной математики
и информационных технологий**

Направление «Прикладная математика»

Задание 1 (10 баллов). Найти предел

$$P = \lim_{x \rightarrow 0} y(x), y(x) = \frac{3}{x^3} \int_0^x \sin(t^2) dt$$

Задание 2 (10 баллов). Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, если $x_1 = 1$ и $x_{n+1} = \frac{3x_n}{1+x_n}$, $n = 1, 2, \dots$

Задание 3 (10 баллов). Вычислить $\det(A^{2024} + A^{2025})$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задание 4 (15 баллов). Найти предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right)$.

Задание 5 (15 баллов). Найти $y(2)$, где $y(x)$ есть решение задачи Коши

$$y' = 2x + 1 - \cos(y - x^2), \quad y(1) = 1.$$

Задание 6 (20 баллов). Найдите сумму $x + y$, где пара (x, y) есть решение системы

$$\begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y}, \\ x^2 y = 1 \end{cases}$$

с наибольшим значением x .

Задание 7 (20 баллов). Вычислить произведение $P = \prod_{k=1}^{\infty} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$ при $x = \pi/2$.

Результат записать в виде десятичной дроби с округлением до двух знаков после запятой, считая, что $\pi = 3$.