МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"

«УТВЕРЖДАЮ»

Первый проректор –
проректор по научной деятельности
__________________ Д.А. Таюрский
« 17 » __________________ 2025 г.

Программа вступительного испытания по специальности

Уровень высшего образования: подготовка кадров высшей квалификации
Тип образовательной программы: программа подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре
Научная специальность: 1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика
Форма обучения: очная

2025

Общие указания

Вступительные испытания по специальности 1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика охватывают стандартные разделы университетских курсов по математической логике, алгебре и теории чисел. Также проверяются базовые компетенции математического аппарата. Вопросы и структура экзаменационных билетов приведены ниже.

Порядок проведения вступительных испытаний

Вступительное испытание проводится в форме экзамена на основе билетов. В каждом экзаменационном билете по 2 вопроса. Экзамен проходит в письменной форме. Подготовка к ответу составляет 1 академический час (60 минут) без перерыва с момента раздачи билетов. Задания оцениваются от 0 до 100 баллов в зависимости от полноты и правильности ответов.

Критерии оценивания

Оценка поступающему за письменную работу выставляется в соответствии со следующими критериями.

Отлично (80-100 баллов)

Поступающий в аспирантуру уверенной владеет материалом, приводит точные формулировки теорем и других утверждений, сопровождает их строгими и полными доказательствами, уверенно отвечает на дополнительные вопросы программы вступительного испытания.

Хорошо (60-79 баллов)

Поступающий в аспирантуру владеет материалом, приводит точные формулировки теорем и других утверждений, сопровождает их доказательствами, в которых допускает отдельные неточности. Отвечает на большинство дополнительных вопросов по программе вступительного испытания.

Удовлетворительно (40-59 баллов)

Поступающий в аспирантуру знаком с основным материалом программы, приводит формулировки теорем и других утверждений, но допускает некоторые неточности, сопровождает их доказательствами, в которых допускает погрешности либо описывает основную схему доказательств без указания деталей. Отвечает на дополнительные вопросы по программе вступительного испытания, допуская отдельные неточности.

Неудовлетворительно (менее 40 баллов)

Поступающий в аспирантуру не владеет основным материалом программы, не знаком с основными понятиями, не способен приводить формулировки теорем и других утверждений, не умеет доказывать теоремы и другие утверждения, не знает даже схемы доказательств. Не отвечает на большинство дополнительных вопросов по программе вступительного испытания.

Вопросы программы вступительного испытания в аспирантуру по научной специальности 1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Линейные пространства, их подпространства. Базис, размерность. Теорема о ранге матрицы. Фундаментальная система решений системы линейных однородных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.

Линейные и квадратичные функции и формы в линейных пространствах, их матрицы.

Приведение к нормальному виду. Закон инерции.

Линейные отображения и преобразования линейного пространства, их задания матрицами. Характеристический многочлен. Собственные векторы и собственные значения, связь последних с характеристическими корнями. Приведение матрицы линейного оператора к жордановой форме.

Евклидово пространство. Ортонормированные базисы. Ортогональные матрицы.

Ортогональные и самосопряженные преобразования, приведение квадратичной формы к главным осям.

Группы и подгруппы, порядок элемента. Циклические группы. Факторгруппа. Теорема о гомоморфизмах.

Классы сопряженных элементов. Центр и коммутант группы. Разрешимые группы. Теорема Силова.

Задание группы образующими и определяющими соотношениями.

Теорема Стоуна о представлении булевых алгебр. Критерий Воота. Теоремы об изоморфизме булевых алгебр. Представление булевых алгебр в виде дерева.

Автоморфизмы булевых алгебр. Лемма о транспозициях. Построение неизоморфных булевых алгебр с изоморфными группами автоморфизмов.

Идеал Ершова-Тарского. Построение булевой алгебры по заданной элементарной характеристике. Теорема об элементальной эквивалентности булевых алгебр. Существование модельного полного расширения булевых алгебр.

Теорема об изоморфизме плотных линейных порядков с одинаковыми концами.

Теорема об ультрапроизведениях.

Теорема об элементарной эквивалентности. Теорема Левенгейма-Скулема-Тарского.

Теоремы Скулема-Тарского о спуске и подъеме.

Теоремы о (конечной) аксиоматизации ∃-аксиоматизации, ∀-аксиоматизации класса алгебраических систем. Скулемовские функции. Полная скулемизация. Теорема о модельно- полных теориях.

Механизм совместности. Теорема о существовании канонической модели. Теорема об опускании типов. Интерполяционная теорема Крейга-Линдона.

Теорема о полноте категоричных теорий. Характеристика Ω-категоричных теорий в терминах булевых алгебр. Теорема о модельной полноте Ω-категоричных теорий.

Аксиомы теории множеств. Аксиома выбора. Теорема об эквивалентности аксиомы выбора принципу полного упорядочения, принципу максимума и утверждению |A2|=|A|.

Принцип трансфинитной индукции. Лемма Цорна. Принцип полного упорядочения.

Теорема о подобии вполне упорядоченных множеств.

Фильтры булевой алгебры. Необходимое и достаточное условие существования ультрафильтра. Теорема о главном ультрафильтре.

Мощность множества. Ординалы. Теорема Кантора-Бернштейна. Утверждения |P(A)|>|A|; |A2|=|A|.

Аксиомы и правила вывода исчисления высказываний (ИВ) и исчисления предикатов (ИП). Семантика и непроти-воречивость. Теоремы о полноте. Характеризация доказуемых формул. Нормальные формы формул ИВ и ИП.

Теорема о существовании модели. Теорема Гёделя о полноте ИП. Локальная теорема Мальцева.

Вычислимость на машинах Тьюринга. Универсальные машины Тьюринга. Частично вычислимые функции и их нумерации. Тезис Черча-Тьюринга.

Функции алгебры логики. Формулы. Реализация функций формулами. Эквивалентность формул. Основные эквива-лентности. Принцип двойственности. Теорема о разложении булевых функций. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма. Полные системы функций. Замкнутые классы. Важнейшие замкнутые классы. Теорема Поста.
Минимизация функций алгебры логики.
Дизъюнктивные нормальные формы (д.н.ф.). Проблема минимизации и ее тривиальное решение. Геометрическая модель. Сокращенная д.н.ф. Алгоритм построения сокращенной д.н.ф. Тупиковые д.н.ф. Алгоритм построения тупиковых д.н.ф.
Детерминированный и недетерминированный автомат. Классы языков распознаваемых КНА и КДА. Лемма о накачке. Ранг языка. Классы эквивалентности Майхилла — Нероуда.
Вероятностные автоматы с изолированной и не изолированной точками сечения (ограниченной и неограниченной ошибкой). Классы языков, распознаваемых вероятностными автоматами.
Графы, их свойства и способы их представления. Обходы графов (в глубину в ширину. Геометрическая реализа-ция графов. Изоморфизм и гомеоморфизм графов. Критерий планарности Понтрягина-Куратовского.
Проблематика теории кодирования. Алфавитное кодирование. Критерий однозначности декодирования. Алгоритм распознавания однозначности декодирования. Построение кодов с минимальной избыточностью.
Задачи дискретной оптимизации. Алгоритмы отыскания минимальных остовных деревьев. Алгоритмы отыскания экстремальных путей в графах. Задача назначения. Венгерский алгоритм и его обоснование. Оценки сложности алгоритмов. Задача о рюкзаке. Метод динамического программирования и оценка его вычислительной сложности.
Задача коммивояжера и другие NP-полные задачи (3-SAT, Клика, Вершинное покрытие ребер, Покрытие множе-ствами, Гамильтонов цикл). Общая схема метода ветвей и границ (МВГ) для решения комбинаторных экстремальных задач. Алгоритмы МВГ для задачи коммивояжера. Методы установления NP - сложности задач. Проблема Кука.
Системы программирования. Трансляция и интерпретация. Принцип модульности. Компоненты системы програм-мирования, их назначение и взаимодействие.

Учебно-методическое обеспечение и информационное обеспечение программы вступительного испытания в аспирантуру по научной специальности 1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

1. Кострикин, А. И. Введение в алгебру: учебник: в 3 частях / А. И. Кострикин. – 4-е изд. – Москва: МЦНМО, 2020 – Часть I: Основы алгебры – 2020. – 271 с. – ISBN 978-5-4439-3264-4. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/146749.
2. Кострикин, А. И. Введение в алгебру: учебник: в 3 частях / А. И. Кострикин. – 3-е изд., стер. – Москва: МЦНМО, 2020 – Часть II: Линейная алгебра – 2020. – 367 с. – ISBN 978-5-4439-3265-1. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/146750.
3. Кострикин, А. И. Введение в алгебру: учебник: в 3 частях / А. И. Кострикин. – 3-е изд., стер. – Москва: МЦНМО, 2020. – Часть III: Основные структуры алгебры – 2020. – 271 с. ISBN 978-5-4439-3266-8. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/146751.
4. Сикорский Р. Булевы алгебры. – М.: Мир, 1969. – 376 с.
5. Ершов, Ю. Л. Математическая логика: учебное пособие / Ю. Л. Ершов, Е. А. Палютин. – 6-е изд. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 356 с. – ISBN 978-5-9221-1301-4. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/59599.
6. Мальцев А.И. Алгебраические системы. – М.: Наука, 1970. – 392 с.
7. Кейслер Г., Чен Ч. Теория моделей. М.: Мир, 1977.
8. Шенфилд Дж. Математическая логика // Дж. Шенфилд. М.: Наука, 1975. 527 с.

9. Ершов, Ю. Л. Математическая логика: учебное пособие / Ю. Л. Ершов, Е. А. Палютин. – 6-е изд. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 356 с. – ISBN 978-5-9221-1301-4. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/59599.
10. Соар Р.И. Вычислимо перечислимые множества и степени (пер. с англ. Под ред. М.М. Арсланова). – Казань: Казанское математическое общество, 2000.
11. Шенфилд Дж. Математическая логика // Дж. Шенфилд. М.: Наука, 1975. 527 с.
12. Арсланов М.М., Калимуллин И.Ш. Математическая логика. – Казань: КФУ, 2009. – 68 с.
13. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – М.: «Наука», 1979.
14. Кофман А. Введение в прикладную комбинаторику. – М.: «Наука», 1975.
15. Оре О. Теория графов. – М.: "Наука", 1980. – 336 с.
16. Басакер Р., Саати Т. Конечные графы и сети. — М.: Наука, 1974.
17. Шеннон К. Математическая теория связи / Работы по теории информации и кибернетике. – М.: ИЛ, 1963.
18. Карманов В.Г. Математическое программирование. – М.: «Наука», 1980.
19. Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. – М.: Мир, 1979.
20. Кнут Д. Искусство программирование для ЭВМ, тт.1–3. – М.: Мир, 1976–1978.
21. Дэвис Д., Барбер Д., Прайс У., Соломонидес С. Вычислительные сети и сетевые протоколы. – М.: «Мир», 1971.

Программа вступительного испытания в аспирантуру составлена в соответствии с государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования по специальности 1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика