

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"

«УТВЕРЖДАЮ»

Первый проректор –
проректор по научной деятельности

_____ Д.А. Таюрский
« _____ 2025 г.



Программа вступительного испытания по специальности

Уровень высшего образования: подготовка кадров высшей квалификации

Тип образовательной программы: программа подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре

Научная специальность: 1.1.3 Геометрия и топология

Форма обучения: очная

Общие указания

Вступительные испытания по специальности 1.1.3 Геометрия и топология охватывают стандартные разделы университетских курсов по дифференциальной геометрии, топологии, дифференцируемым многообразиям, римановой геометрии, тензорному анализу, группам Ли, расслоенным пространствам, проективной геометрии, неевклидовым геометриям. Также проверяются базовые компетенции математического аппарата. Вопросы экзаменационных билетов для вступительного испытания приведены ниже.

Порядок проведения вступительных испытаний

Вступительное испытание проводится в форме экзамена на основе билетов. В каждом экзаменационном билете по 2 вопроса. Экзамен проходит в письменной форме. Подготовка к ответу составляет 1 академический час (60 минут) без перерыва с момента раздачи билетов. Задания оцениваются от 0 до 100 баллов в зависимости от полноты и правильности ответов.

Критерии оценивания

Оценка поступающему за письменную работу выставляется в соответствии со следующими критериями.

Отлично (80-100 баллов)

Оценка демонстрирует полноту, аргументированность, убедительность ответов на вопросы; демонстрирует логику построения ответа на вопросы; свободно владеет материалом; проявляет культуру выступления, ясность и четкость; свободное владение терминами, понятиями, фактическим материалом; демонстрация аналитических способностей, умение находить обосновывать междисциплинарные подходы к решению математической проблемы.

Хорошо (60-79 баллов)

Знание в общих чертах действующей системы источников права по научной специальности; знание основных понятий по геометрии и топологии; умение пользоваться понятийным аппаратом по соответствующей научной специальности; знание важнейших работ из списка рекомендованной литературы; демонстрирует наличие собственного мнения о проблемах, затронутых в вопросах.

Удовлетворительно (40-59 баллов)

Демонстрирует недостаточную полноту ответов на вопросы; затруднения с использованием понятийного аппарата по соответствующей научной специальности; неполное знакомство с рекомендованной литературой; недостаточно точное, последовательное и аргументированное изложение ответа.

Неудовлетворительно (менее 40 баллов)

В ответах на поставленные вопросы отсутствует логика; отвечающий затрудняется с ответом на уточняющие, дополнительные вопросы и при видоизменении вопросов; ответ показывает незнание нормативного, судебного, теоретического, методического и доктринального материала.

Вопросы программы вступительного испытания в аспирантуру по научной специальности 1.1.3 Геометрия и топология

Примечание: здесь и далее в скобках указаны номера из списка рекомендуемой литературы

1. Топология

Метрическое пространство. Полнота. Теорема Бэра о категории [7, 12, 24]. Топологическое пространство. Непрерывность. Гомеоморфизм. Аксиомы отделимости. Связность и линейная связность. Фактор-топология. Топологии в функциональных пространствах (открыто-замкнутая топология в пространстве непрерывных отображений и C^k -топология в пространстве гладких отображений) [7, 12, 24, 26]. Лемма Урысона. Теорема о продолжении непрерывных функций [7, 12, 24].

Компактность и способы компактификации пространств. Теорема Тихонова о компактности произведения. Расширения Чеха-Стоуна. Разбиение единицы и его приложения. Теорема Вейерштрасса об аппроксимации полиномами непрерывной функции на компакте в евклидовом пространстве [7, 12, 24, 26]. Лебегово определение размерности. Нерв покрытия и аппроксимация компакта полиэдрами [7]. Индуктивное определение топологической размерности. Теорема Урысона об эквивалентности [7]. Хаусдорфова размерность. Ее связь с топологической. Фракталы: канторово множество, ковер Серпинского, их хаусдорфова размерность [31].

2. Алгебраическая топология

Гомотопическая эквивалентность. Гомотопические классы отображений. Фундаментальная группа топологического пространства. Группа кос как фундаментальная группа конфигурационного пространства системы точек на плоскости. Гомотопические группы пространств и их гомотопическая инвариантность. Точная гомотопическая последовательность пары. Вычисление k -мерных гомотопических групп n -мерной сферы для k меньших или равных n [1, 3, 4].

Пространства Эйленберга-Маклейна. N -пространства и группа гомотопических классов отображений в N -пространство. Коммутативность фундаментальной группы N -пространства [1, 3, 4].

Группы сингулярных гомологий и когомологий. Симплициальные и клеточные пространства. Симплициальные и клеточные гомологии и когомологии, их связь с сингулярными. Эйлерова характеристика. Гомотопическая инвариантность групп гомологий. Умножение в когомологиях. Точные гомологическая и когомологическая последовательности пары. Гомологии и когомологии с коэффициентами. Оператор Бокштейна. Связь фундаментальной группы и группы одномерных гомологий. Двойственность Пуанкаре для многообразий [1, 3, 4, 19].

Теории гомологий и когомологий. Аксиомы теории гомологий и когомологий. Теорема единственности для гомологий и когомологий. Группы когомологий как группы классов отображений в пространства Эйленберга-Маклейна [1, 3, 4].

Кольцо когомологий N -пространства как алгебра Хопфа. Классификация градуированных алгебр Хопфа над полем рациональных чисел [1, 3, 4].

Гомологии и кольца когомологий проективных пространств. Клетки Шуберта и гомологии многообразий Грассмана [8, 3].

Накрытия. Лемма о накрывающей гомотопии. Универсальное накрытие. Накрытие и фундаментальная группа. Аксиома о накрывающей гомотопии и расслоение в смысле Серра. Пространство путей и петель, лемма о накрывающей гомотопии для расслоения путей [1, 3, 4].

Локально тривиальные расслоения. Сечения. Точная гомотопическая последовательность расслоения. Основные понятия теории препятствий (препятствующий коцикл и первое препятствие к сечению расслоения) [3].

Действие монодромии в гомологиях расслоения. Формула Пикара-Лефшеца [6].

Векторные расслоения. Прямая сумма и тензорное произведение векторных расслоений. Многообразие Грассмана как база универсального векторного расслоения. Пространства Тома и изоморфизм Тома в гомологиях и когомологиях [1, 3, 4, 8].

Характеристические классы векторных расслоений [8].

Понятие о группе $K(X)$ и периодичности Ботта. Группа $K(X)$ как когомологический функтор [3, 4, 28].

3. Топология гладких многообразий

Гладкие многообразия. Криволинейные координаты. Гладкие отображения и дифференциал. Дiffeоморфизм. Подмногообразия. Ориентация. Касательные векторы и касательные расслоения. Примеры гладких многообразий. Теория Морса: функции Морса, индуцированное клеточное разбиение, неравенства Морса. Перестройки в многообразиях. Конструкция Понтрягина-Тома. Понятие бордизма многообразий [1, 13].

Вложения и погружения. Теорема Уитни о вложении и погружении в евклидовы пространства. Субмерсии и гладкие расслоения. Особые и регулярные точки гладких отображений. Лемма Сарда (формулировка). Степень отображения, ее гомотопическая инвариантность. Применения степени отображения. Степень отображения и интеграл. Теорема Гаусса-Бонне. Гомотопическая классификация отображений n -мерной сферы в себя. Расслоение Хопфа и классификация отображений трехмерной сферы в двумерную. Инвариант Хопфа [1, 3, 21].

Индекс особой точки векторного поля и теорема Эйлера-Пуанкаре [1].

Двойственность Александера. Индексы пересечения и зацепления. [3, 4].

Исчисление струй. Топологии Уитни в пространствах гладких отображений. Теоремы трансверсальности. Теорема трансверсальности Тома и ее следствия: лемма Морса, слабая теорема Уитни. Локальная классификация устойчивых отображений плоскости в плоскость и в трехмерное пространство. Число Милнора изолированной особенности функции [6].

4. Топология малых размерностей

Классификация двумерных замкнутых поверхностей. Группы гомологий и фундаментальные группы двумерных поверхностей. Узлы и зацепления. Движения Райдемайстера. Полином Александера узла. Примеры трехмерных многообразий. Склейка полноторий по диффеоморфизму границы. Диаграмма Хегора трехмерных многообразий [3, 9, 21].

5. Дифференциальная геометрия

Теория кривых и поверхностей в трехмерном пространстве: натуральный параметр, кривизна и кручение кривой, формулы Френе, первая и вторая квадратичные формы поверхности, гауссова и средняя кривизны, главные направления и главные кривизны, теорема Менье и формула Эйлера. Девриационные формулы [1, 11, 21, 22].

Риманова метрика и римановы многообразия. Подмногообразия в евклидовом пространстве и индуцированная метрика. Геометрия Лобачевского. Проективная геометрия [1, 11, 21].

Тензоры и тензорные поля на гладких многообразиях. Алгебраические операции над тензорами. Симметрические и кососимметрические тензоры. Производная Ли [1, 2, 21].

Внешние дифференциальные формы, внешнее дифференцирование. Интегрирование внешних дифференциальных форм. Формула Стокса. Точные и замкнутые формы. Когомологии де Рама. Теорема де Рама (без доказательства). Оператор Лапласа и гармонические формы. Двойственность Пуанкаре [1, 15, 21].

Ковариантное дифференцирование. Символы Кристоффеля. Тензор кручения. Римановы симметрические связности. Тензор кривизны Римана и критерий локальной евклидовости римановой метрики, тензор Риччи и скалярная кривизна. Теорема Гаусса о связи между скалярной и гауссовой кривизнами [1, 2, 21].

Параллельный перенос и геодезические. Формула Эйлера-Лагранжа. Примеры: геодезические на плоскости, сфере, плоскости Лобачевского, поверхности вращения. Сопряженные точки и индекс геодезической [1, 21].

Связности и кривизна в расслоениях. Тождество Бьянки [1, 2, 13].

Характеристические классы и характеристические числа. Конструкция Чженя-Вейля характеристических классов. Характеристические числа [8, 15].

Теорема Стокса и инвариантность характеристических чисел относительно бордизма [1, 2, 8].

Проективная двойственность и преобразования Лежандра [5, 11].

6. Геометрические структуры на гладких многообразиях

Структуры на гладких многообразиях: риманова, почти комплексная, эрмитова, комплексная, кэлерова. Понятие о препятствиях к существованию структур [15].

Симплектическая структура. Примеры симплектических многообразий. Теорема Дарбу. Существование почти комплексной структуры на симплектическом многообразии. Скобка Пуассона. Примеры пуассоновых многообразий. Гамильтоновы векторные поля и гамильтоновы системы. Первые интегралы гамильтоновых систем [5, 1].

Контактные структуры и контактные многообразия. Примеры. Слоения и распределения. Теорема Фробениуса [4, 5].

7. Геометрия групп Ли и однородных пространств

Группы Ли и алгебры Ли, присоединенное представление. Алгебра Ли векторных полей. Действия групп Ли на гладких многообразиях. Односвязные и не односвязные группы Ли. Однородные пространства. Примеры: классические матричные группы Ли, многообразия Грассмана и Штифеля, лагранжевы грассманианы $U(n)/O(n)$ и $U(n)/SO(n)$. Компактные группы Ли и биинвариантная метрика [14, 1, 22, 25].

Кольцо когомологий компактной группы Ли [1]. Группы токов и группы диффеоморфизмов как примеры бесконечномерных групп Ли [27].

8. Дискретная и комбинаторная геометрия

Выпуклые множества и разбиения пространства. Разбиения Вороного и Делоне [16]. Кристаллы как правильные точечные системы. Кристаллографическая группа в евклидовом пространстве. Классификация кристаллографических групп на плоскости [10].

Правильные многогранники. Теорема Коши о единственности выпуклого многогранника с данным набором граней [11, 30, 29].

**Учебно-методическое обеспечение и информационное обеспечение программы
вступительного испытания в аспирантуру по научной специальности 1.1.3 Геометрия и
топология**

Основная литература:

1. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Геометрия поверхностей, групп преобразований и полей. Геометрия и топология многообразий. Теория гомологий. Современная геометрия: методы и приложения. - Т. 1-3. – Москва, 2013. - 335 с.
2. Новиков С.П., Тайманов И.А. Современные геометрические структуры и поля. - М.: МЦНМО, 2003.
3. Фоменко А.Т., Фукс Д.Б. Курс гомотопической топологии. - М.: Наука, 1989.
4. Новиков С.П. Топология. - Москва-Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2002.
5. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. - М.: Наука, 1989.
6. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. - Том 1, 2. - М.: Наука, 1982, 1984.
7. Александров П.С., Пасынков Б.А. Введение в теорию размерности. - М.: Наука, 1973.
8. Милнор Дж., Штафф Дж. Характеристические классы. - М.: Мир, 1979.
9. Прасолов В.В., Сосинский А.Б. Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия. - М.: Изд-во МЦНМО, 1997.
10. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. - М.: Наука, 1981.
11. Коксетер Г.С.М. Введение в геометрию. - М., Наука, 1966.

Дополнительная литература:

12. Келли Дж. Общая топология. - М.: Наука, 1981.
13. Милнор Дж. Теория Морса. - М.: Мир, 1965.
14. Винберг Э.Б., Онищук А.Л. Семинар по алгебраическим группам и группам Ли. - М.: Наука, 1988.
15. Чжень Ш.-Ш. Комплексные многообразия. - М.: Иностранная Литература, 1961.
16. Роджерс К. Укладки и покрытия. - Мир, М., 1968.
17. Бредон Г. Введение в теорию компактных групп преобразований. - М.: Наука, 1980.
18. Милнор Дж., Уоллес А. Дифференциальная топология. Начальный курс. - М.: Мир, 1972.
19. Милнор Дж. Теорема об h -кобордизме. - М.: Мир, 1969.
20. Хирш М. Дифференциальная топология. - М.: Мир, 1979.
21. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. - М.: Изд-во "Факториал Пресс", 2000.
22. Тайманов И.А. Лекции по дифференциальной геометрии. - Москва-Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2002.
23. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. - Том 1,2. - М.: Наука, 1981.
24. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции. - М.: Изд-во МГУ, 1988.
25. Голод П.И., Климык А.У. Математические основы теории симметрий. - Москва-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001.
26. Рохлин В.А., Фукс Д.Б. Начальный курс топологии, Геометрические главы. - М.: Наука, 1977.
27. Пресли А., Сигал Г., Группы петель. - М.: Мир, 1990.
28. Атья М. Лекции по К-теории. - Мир, 1967.
29. Александров А.Д. Выпуклые многогранники. - Изд-во Техничко-Теоретической литературы. - М., Л., 1950.
30. Люстерник Л.А. Выпуклые фигуры и многогранники. - Изд-во Техничко-Теоретической литературы. - М., Л., 1956.
31. Федер Е. Фракталы. - Мир, М., 1991.

Программа вступительного испытания в аспирантуру составлена в соответствии с государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования по специальности 1.1.3 Геометрия и топология.