

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования

«Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по образовательной
деятельности

Е. А. Турилова
«28»



Е. А. Турилова

2024г.

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ

Направление подготовки: 02.04.01 Математика и компьютерные науки

Магистерские программы: «Методы математического и алгоритмического моделирования
общенаучных и прикладных задач», «Статистические методы науки о данных»

Лист согласования программы вступительного испытания

Разработчик(и) программы:

зав. кафедрой теории функций и приближений Ф. Г. Авхадиев

зав. кафедрой математической статистики Е. А. Турилова

(должность, инициалы, фамилия)

Председатель экзаменационной комиссии Ф. Г. Авхадиев

(подпись)

(инициалы, фамилия)

Программа вступительного испытания обсуждена и одобрена на заседании кафедры теории функций и приближений Института математики и механики им. Н. И. Лобачевского
Протокол №1 от «30» августа 2024 г.

Программа вступительного испытания обсуждена и одобрена на заседании кафедры математической статистики Института математики и механики им. Н. И. Лобачевского
Протокол №1 от «30» августа 2024 г.

Решением Учебно-методической комиссии Института математики и механики им. Н. И. Лобачевского Программа вступительного испытания рекомендована к утверждению Ученым советом, Протокол №1 от «8» октября 2024 г.

Программа вступительного испытания утверждена на заседании Ученого совета Института математики и механики им. Н. И. Лобачевского, Протокол № ____ от «__» _____ 2024 г.

Содержание

Раздел I. Вводная часть

- 1.1 Цель и задачи вступительных испытаний
- 1.2 Общие требования к организации вступительных испытаний
- 1.3 Описание формы проведения вступительных испытаний
- 1.4 Продолжительность вступительных испытаний в минутах
- 1.5 Структура вступительных испытаний

Раздел II. Содержание программы

Раздел III. Фонд оценочных средств

- 3.1. Инструкция по выполнению работы
- 3.2. Образцы заданий вступительных испытаний

Раздел IV. Список литературы

Раздел I. Вводная часть

1.1. Цель и задачи вступительных испытаний

Цель вступительного испытания – определить уровень профессиональной подготовки абитуриента и соответствие требованиям, предъявляемым к знаниям, умениям и навыкам предметной области, соответствующей профилю подготовки.

Вопросы билетов составляются на основе Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования бакалавриата и позволяют оценить качество знаний, необходимых для освоения программы подготовки магистра по избранному направлению.

1.2. Общие требования к организации вступительных испытаний

К вступительным испытаниям допускаются граждане Российской Федерации и граждане иностранных государств, успешно завершившие обучение по образовательным программам основного общего образования и имеющие документ государственного образца: диплом бакалавра или диплом специалиста, или диплом магистра.

Руководство по организации и проведению вступительных испытаний осуществляют преподаватель и члены экзаменационной комиссии, соблюдая при этом законодательство Российской Федерации, требования ФГОС ВПО, локальных документов о подготовке и проведении вступительных испытаний.

Проведение вступительных испытаний осуществляется в соответствии с принципами соблюдения прав и свобод граждан, установленных законодательством РФ, гласности и открытости результатов вступительных испытаний, объективности оценки способностей абитуриентов и единообразия оценки вступительных испытаний. Приём на образовательную программу осуществляется на конкурсной основе по результатам вступительного экзамена.

1.3. Описание формы проведения вступительных испытаний

Вступительные испытания проводятся в форме письменного экзамена очно и (или) с использованием дистанционных технологий.

1.4. Продолжительность вступительных испытаний в минутах

Общая продолжительность экзамена – 160 минут.

1.5. Структура вступительных испытаний

Абитуриент получает билет, содержащий 10 задач, и записывает решение на ланках для ответов. По истечении времени билет сдаётся и проверяется экзаменационной комиссией. По итогу выставляется одна оценка, соответствующая уровню профессиональной подготовки участника.

Раздел II. Содержание программы

Темы, знание которых необходимо для выполнения экзаменационной работы:

1. Топология на множестве. Открытые и замкнутые подмножества. База и предбаза топологии. Индуцированная топология. Непрерывные отображения топологических пространств.
2. Аксиомы отделимости: хаусдорфовы, регулярные и нормальные пространства. Связные и линейно связные топологические пространства. Компактные пространства.
3. Непрерывные отображения в евклидовых пространствах. Производная и дифференциал отображения. Условия дифференцируемости отображения.
4. Интеграл Римана. Интегрируемость непрерывной на отрезке функции. Формула Ньютона-Лейбница.
5. Ряды функций. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы, почленное интегрирование и дифференцирование).
6. Степенные ряды в действительной и комплексной области. Радиус сходимости, свойства степенных рядов (почленное дифференцирование, интегрирование). Разложение элементарных функций в степенные ряды.
7. Несобственные интегралы и их сходимость. Равномерная сходимость интегралов, зависящих от параметра. Свойства равномерно сходящихся интегралов.
8. Ряды Фурье. Достаточные условия представимости функции рядом Фурье.
9. Мера и интеграл Лебега. Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла (Лебега, Леви, Фату).
10. Основные принципы линейного анализа (теорема Хана-Банаха, принцип равномерной ограниченности, теорема Банаха об обратном операторе).
11. Компактные операторы и их свойства. Интегральные уравнения и теоремы Фредгольма.
12. Принцип сжимающих отображений и его применение к дифференциальным и интегральным уравнениям.
13. Линейные пространства, их подпространства. Базис, размерность. Теорема о ранге матрицы. Система линейных уравнений. Фундаментальная система решений системы линейных однородных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Решение системы линейных неоднородных уравнений.
14. Билинейные и квадратичные формы и их матрицы. Приведение к нормальному виду. Закон инерции.

15. Линейные преобразования линейного пространства, их матрицы. Характеристический многочлен линейного преобразования. Собственные векторы и собственные значения, связь с характеристическими корнями. Жорданова форма линейного оператора и алгоритм ее нахождения.
16. Евклидово пространство. Ортонормированные базисы. Ортогональные и симметрические преобразования, их матрицы. Приведение квадратичной формы к главным осям. Унитарные пространства. Эрмитовы формы.
17. Основные алгебраические структуры (группы, кольца, поля). Теорема Лагранжа. Порядок элемента, циклические группы. Основная теорема о гомоморфизме. Характеристика поля, расширения полей и существование поля разложения.
18. Дифференциальное уравнение 1-го порядка. Теорема о существовании и единственности решения. Численное решение дифференциальных уравнений 1-го порядка.
19. Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка. Линейное однородное уравнение. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского, линейное неоднородное уравнение. Численное решение краевых задач для дифференциальных уравнений 2-го порядка.
20. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами: однородные и неоднородные.
21. Функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана.
22. Элементарные функции комплексного переменного. Простейшие многозначные функции.
23. Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру. Интеграл Коши. Ряд Тейлора.
24. Ряд Лорана. Полюс и существенно особая точка.
25. Аффинная и метрическая классификация кривых и поверхностей 2-го порядка. Проективная классификация кривых.
26. Криволинейные координаты на поверхности. Первая квадратичная форма поверхности. Понятие о внутренней геометрии поверхности.
27. Вторая квадратичная форма поверхности. Нормальная кривизна линии на поверхности. Теорема Менье.
28. Главные направления и главные кривизны. Полная и средняя кривизна поверхности и их поведение при изгибании поверхности. Формула Эйлера. Локальное строение поверхности. Теорема Гаусса (без доказательства).
29. Приближение функций полиномами и сплайнами.
30. Квадратурные формулы.
31. Методы численного решения систем линейных алгебраических уравнений.

32. Итерационные методы решения нелинейных алгебраических уравнений.
33. Численное решение дифференциальных уравнений 1-го порядка.
34. Приближенные методы решения уравнений Фредгольма II рода.
35. Условная вероятность. Независимость. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
36. Функция распределения вероятностей и ее свойства. Примеры распределений: Бернулли, биномиальное, Пуассона, равномерное, показательное, нормальное и др. распределения.
37. Математическое ожидание и его свойства. Дисперсия и ее свойства. Моменты.
38. Закон больших чисел Чебышева.
39. Проверка статистических гипотез.
40. Рекурсивные функции и их особенности.
41. Механизмы управления памятью компьютера.
42. Базовые типы в языках программирования.
43. Основные средства и особенности процедурных языков программирования. Описание функций и их использование.
44. Алгоритмы сортировки. Оценка вычислительной сложности алгоритмов сортировки.
45. Алгоритмы поиска. Оценка вычислительной сложности алгоритмов поиска.
46. Линейные списки и алгоритмы их обработки.
47. Деревья и алгоритмы их обработки.
48. Символьные строки и их обработка.
49. Классы. Поля, свойства и методы, защита элементов классов. Создание и уничтожение объектов. Описание классов и работа с объектами классов на современных языках программирования (C#).
50. Классы. Инкапсуляция, наследование и полиморфизм.
51. Определение собственных операторов в классе.
52. Работа с перечислимыми типами (Enumerable) и коллекциями элементов.
53. Обобщенные типы данных.
54. Лямбда-выражения.
55. Основы LINQ.

Раздел III. Фонд оценочных средств

3.1. Инструкция по выполнению работы

На входе в КФУ, поступающий проходит процедуру идентификации личности (по паспорту или иному документу, подтверждающему личность), по завершению которой получает экзаменационный лист. Далее, в сопровождении сотрудника приёмной комиссии проходит в отведенную для проведения вступительного испытания аудиторию. По окончании вступительного испытания листы с работами передаются членам экзаменационной комиссии.

Присутствие на вступительных испытаниях посторонних лиц не допускается.

3.2. Образцы заданий вступительных испытаний

1. Пусть функция $f(x, y) = e^{-1/(x^2+y^2)}$, если $(x, y) \neq (0, 0)$, а в точке $(0, 0)$ её значение равно нулю. Доказать, что функция f дифференцируема в точке $(0, 0)$ и найти её частные производные в этой точке.
2. Найти точку, в которой достигается максимум функции

$$f(x) = \frac{13x}{10 + 5x^2}$$

на отрезке $[1, 5]$.

3. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ 1 & -3 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Для функции $f(x) = x^3 + 3x^2 + 7$, $x \in [a, b] = [1, 7]$, построить интерполяционный полином Лагранжа $L_4(f, x)$ по узлам $x_k = a + k \frac{b-a}{6}$, $k = \overline{1, 4}$.
 - А. $L_4(f, x) = 2x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 16$
 - Б. $L_4(f, x) = x^3 + 3x^2 + 7$
 - В. $L_4(f, x) = x^4 - x^3 + 3x^2$
 - Г. $L_4(f, x) = 13x^2 + 16$
5. Вычислить первое приближение решения системы линейных уравнений методом простой итерации. Нулевое приближение $x^0 = (0, 0, 0)$.

$$\begin{cases} x_1 = 0.4x_1 + 0.01x_2 - 0.56x_3 + 2.13 \\ x_2 = 0.7x_1 - 0.72x_2 + 0.27x_3 - 0.36 \\ x_3 = 0.32x_1 + 0.2x_2 + 0.38x_3 + 1.21 \end{cases}$$

- А. $x^1 = (2.3, 1.72, 2.28)$
- Б. $x^1 = (0.4, 0.7, 0.32)$
- В. $x^1 = (2.13, -0.36, 1.21)$

Г. $x^1 = (1.79, 0.63, 3.16)$

6. Игральную кость бросают до тех пор, пока сумма выпавших за время бросания очков не превысит 12. Какая общая сумма очков будет наиболее вероятной?

А. 14

Б. 16

В. 13

Г. 15

7. Пусть X_1, \dots, X_n — выборка из непрерывного распределения с носителем $[0;1]$ и с функцией плотности $f(x) = (2\theta + 1)x^{2\theta}$, где $\theta > 0$. Постройте оценку по методу максимального правдоподобия для θ .

А. $\frac{n}{-\sum_{i=1}^n \ln X_i}$

Б. $\frac{n}{-\sum_{i=1}^n \ln X_i} - \frac{1}{2}$

В. $\frac{1}{\sum_{i=1}^n \ln X_i}$

Г. $\frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln X_i} + \frac{1}{2}$

8. Дан программный код на языке C#:

```
string s = "8 2 1 2 5 3";  
string[] values = s.Split(' ');  
var int_values = values.Select(int.Parse).ToList();  
int_values.Sort();  
int_values.RemoveAt(0);  
Console.WriteLine(int_values.Sum());
```

Что будет выведено в результате работы программы на экран?

9. Дан программный код на языке C#:

```
var input = "12:___";  
Console.WriteLine(Arrows.GetAngle(input));  
  
public static class Arrows  
{  
    public static double GetAngle(string str)  
    {  
        var time = DateTime.Parse(str);  
        var k = 180;  
        var h = time.Hour % 12;  
        var m = time.Minute % 60;  
        var ma = k * m / 30.0;  
        var ha = (h + m / 60.0) * k / 6;  
        var da = Math.Abs(ha - ma);  
        if (da > k) return 2 * k - da;  
        return da;  
    }  
}
```

Какое число минут из диапазона от 0 до 59 включительно нужно поставить в строке «input» на месте прочерков, чтобы выводимое программой значение составило 99 градусов?

10. Что выведет следующая программа?

```
foreach (var k in new Odd())
{
    foreach (var k2 in new Odd())
    {
        Console.WriteLine($"{k2}");
        if (k2 >= k) break;
    }
    if (k > 5) break;
    Console.WriteLine(" ");
}

class Odd : IEnumerable<int>
{
    public IEnumerator<int> GetEnumerator()
    {
        var i = 1;
        while (true)
        {
            yield return i;
            i += 2;
        }
    }
}

IEnumerator IEnumerable.GetEnumerator()
{
    return GetEnumerator();
}
```

Раздел IV. Список литературы

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
2. Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976. 320 с.
3. Никольский С.М. Курс математического анализа. М.:Наука, 1983, т.1 464 с. т.2. 448 с.
4. Никольский С.М. Курс математического анализа. М.: Физматлит, 2001.
5. Шерстнев А.Н. Конспект лекций по математическому анализу. Казань: Изд-во КГУ, 2005.
6. Кострикин А.И. Введение в алгебру. М.: Наука,1994.
7. Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия. М.: Наука, 1986.
8. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1971.
9. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука. 1979. 512 с.
10. Бахвалов С.В., Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. М.: Наука. 1964.

11. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. М.: Наука. 1981. 232 с.
12. Борисович Ю.Г. и др. Введение в топологию. М.: Наука. 1995.
13. Косневски Ч. Начальный курс алгебраической топологии. М.: Мир. 1983. 302 с.
14. Норден А.П. Краткий курс дифференциальной геометрии. М.: Физматгиз. 1958.
15. Белько И.В. и др. Дифференциальная геометрия. Минск: Изд-во БГУ. 1982.
16. Карташев А.П., Рождественский Б.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления.- М.: Наука, 1976.
17. Петровский И.Г. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям.- М.: Наука, 1970.
18. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения.- М.: Наука, 1982.
19. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1999.
20. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Т. 1,2. М.: Мир, 1978.
21. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч.1. М.: Наука, 1985.
22. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы: В 2-х томах. – М.: Наука, 1976.
23. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений, т.1. – М.: Наука, 1966; т.2. М.: Физматгиз, 1962.
24. Бабенко К.И. Численные методы анализа. М.: Наука, 1986. 744 с.
25. Информатика: учебник / С.Р.Гуриков. – М.: ИД «ИНФА-М» – М, 2020. – 566с. – <https://znanium.com/catalog/document?id=365326>
26. Информатика и информационно-коммуникационные технологии (ИКТ): учебное пособие / Н.Г. Плотникова. – М.: РИОР: <https://znanium.com/catalog/document?id=362870><http://znanium.com/~catalog/product/941739>
27. Информатика, автоматизированные информационные технологии и системы: учебник / В.А.Гвоздева. – М: Форум, 2020. – 542с. – <https://znanium.com/catalog/~document?id=364901>
28. Информационно-коммуникационные технологии в образовании: учебник /О.Ф.Брыксина, Е.А. Понамарева, М.Н.Сонина. – М.: ИНФРА-М – М, 2020. – 549с. – <https://znanium.com/catalog/document?id=340853>
29. Информационные технологии в науке и образовании: учебное пособие /Е.Л.Федотова, А.А. Федотов. – М.: ИД ФОРУМ: НИЦ ИНФРА – М, 2015. – 336с. <http://znanium.com/catalog/product/487293>

30. Методы оптимальных решений: учебник / К.В. Балдин, В.Н. Башлыков, А.В. Рукосуев. – М.:Флинта – М, 2020. – 328с.
<https://znanium.com/catalog/-document?id=360613>
31. Хорев, П. Б. Объектно-ориентированное программирование с примерами на C# : учебное пособие / П.Б. Хорев. — Москва : ФОРУМ : ИНФРА-М, 2023. — 200 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-00091-680-3. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.ru/catalog/product/1926392>
32. Гуриков, С. Р. Введение в программирование на языке Visual C# : учебное пособие / С.Р. Гуриков. — Москва : ФОРУМ : ИНФРА-М, 2020. — 447 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-00091-458-8. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1092167>
33. Лисьев, Г. А. Программное обеспечение компьютерных сетей и web-серверов : учебное пособие / Г.А. Лисьев, П.Ю. Романов, Ю.И. Аскерко. — Москва : ИНФРА-М, 2023. — 145 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). — DOI 10.12737/textbook_5a93ba6860adc5.11807424. - ISBN 978-5-16-013565-6. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.ru/catalog/product/1914008>
34. Медведев, М. А. Программирование на СИ#: учебное пособие / Медведев М.А., Медведев А.Н., - 2-е изд., стер. - Москва :Флинта, Издательство Уральского университета, 2017. - 64 с. ISBN 978-5-9765-3169-7. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/948428>
35. Белов, В. В. Алгоритмы и структуры данных : учебник / В.В. Белов, В.И. Чистякова. — Москва : КУРС : ИНФРА-М, 2023. — 240 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-906818-25-6. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.ru/catalog/product/2110058>
36. Гагарина, Л. Г. Основы программирования на языке C : учебное пособие / Л.Г. Гагарина, Е.Г. Дорогова. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : ИНФРА-М, 2023. — 269 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). — DOI 10.12737/1035562. - ISBN 978-5-16-015470-1. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.ru/catalog/product/1907425>
37. Гуриков, С. Р. Основы алгоритмизации и программирования на Python : учебное пособие / С.Р. Гуриков. — Москва : ИНФРА-М, 2023. — 343 с. — (Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-017142-5. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.ru/catalog/product/1913856>
38. Колдаев, В. Д. Численные методы и программирование : учебное пособие / В.Д. Колдаев ; под ред. Л.Г. Гагариной. — Москва : ФОРУМ : ИНФРА-М, 2024. — 336 с.

- (Среднее профессиональное образование). - ISBN 978-5-8199-0779-5. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.ru/catalog/product/2104836>
39. Канцедал, С. А. Алгоритмизация и программирование : учебное пособие / С. А. Канцедал. — Москва : ФОРУМ : ИНФРА-М, 2021. — 352 с. — (Среднее профессиональное образование). - ISBN 978-5-8199-0727-6. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1189320>
40. Колдаев, В. Д. Архитектура ЭВМ : учебное пособие / В.Д. Колдаев, С.А. Лупин. — Москва : ФОРУМ : ИНФРА-М, 2024. — 383 с. — (Среднее профессиональное образование). - ISBN 978-5-8199-0868-6. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.ru/catalog/product/2149040>
41. Колдаев, В. Д. Основы алгоритмизации и программирования : учебное пособие / В.Д. Колдаев ; под ред. проф. Л.Г. Гагариной. — Москва : ФОРУМ : ИНФРА-М, 2022. — 414 с. — (Среднее профессиональное образование). - ISBN 978-5-8199-0733-7. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.ru/catalog/product/1735805>