МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Казанский (Приволжский) федеральный университет»
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по
образовательной деятельности
__________ Е.А. Турилова
«28» __________ 2024 г.

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ

Направление подготовки: 01.04.01 «Математика» (профили подготовки: Анализ на многообразиях; Геометрия и топология)

2024

Лист согласования программы вступительного испытания

Разработчик(и) программы:

зав. кафедрой геометрии А.А. Попов

зав. кафедрой алгебры и математической логики М.М. Арсланов

(должность, инициалы, фамилия)

Председатель экзаменационной комиссии А.А. Попов

(подпись) (инициалы, фамилия)

Решением Учебно-методической комиссии Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского Программа вступительного испытания рекомендована к утверждению Ученым советом, Протокол № 1 от «08» октября 2024 г.

Программа вступительного испытания утверждена на заседании Ученого совета Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Протокол № 2 от «10» октября 2024 г.

Содержание

Раздел I. Вводная часть.

1.1 Цель и задачи вступительных испытаний

Цель вступительного испытания – определить уровень профессиональной подготовки абитуриента и соответствие требованиям, предъявляемым к знаниям, умениям и навыкам предметной области, соответствующей профилю подготовки.

Вопросы билетов составляются на основе Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования бакалавриата и позволяют оценить качество знаний, необходимых для освоения программы подготовки магистра по избранному направлению.

1.2 Общие требования к организации вступительных испытаний

К вступительным испытаниям допускаются граждане Российской Федерации и граждане иностранных государств, успешно завершившие обучение по образовательным программам основного общего обязательного и имеющие документ государственного образца: аттестат.

Руководство по организации и проведению вступительных испытаний осуществляют председатель и члены экзаменационной комиссии, которые несут всю полноту ответственности за соблюдение законодательства Российской Федерации, требования ФГОС СПО, локальных документов о подготовке и проведении вступительных испытаний.

Проведение вступительных испытаний осуществляется в соответствии с принципами соблюдения прав и свобод граждан, установленных законодательством РФ, гласности и открытости результатов вступительных испытаний, объективности оценки способностей абитуриентов и единообразия оценки вступительных испытаний.

Приём на образовательную программу осуществляется на конкурсной основе по результатам вступительного экзамена.

1.3 Описание формы проведения вступительных испытаний

Вступительные испытания проводятся в форме письменного экзамена очно и (или) с использованием дистанционных технологий.

1.4 Продолжительность вступительных испытаний в минутах

Общая продолжительность экзамена – 160 минут.

1.5 Структура вступительных испытаний

Абитуриент вытягивает билет, который состоит из 10 задач, и записывает решение на бланках для ответов. По истечении времени билет сдаётся и проверяется экзаменационной комиссией. По итогу выставляется одна оценка, соответствующая уровню профессиональной подготовки участника.

Раздел II. Содержание программы

Темы, знание которых необходимо для выполнения экзаменационной работы:

1. Топология на множестве. Открытые и замкнутые подмножества. База и предбаза топологии. Индуцированная топология. Непрерывные отображения топологических пространств.
2. Аксиомы отделимости: хаусдорфовы, регулярные и нормальные пространства. Связные и линейно связные топологические пространства. Компактные пространства.
3. Непрерывные отображения в евклидовых пространствах. Производная и дифференциал отображения. Условия дифференцируемости отображения.
4. Интеграл Римана. Интегрируемость непрерывной на отрезке функции. Формула Ньютона-Лейбница.
5. Ряды функций. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы, почленное интегрирование и дифференцирование).
6. Степенные ряды в действительной и комплексной области. Радиус сходимости, свойства степенных рядов (почленное дифференцирование, интегрирование). Разложение элементарных функций в степенные ряды.
7. Несобственные интегралы и их сходимость. Равномерная сходимость интегралов, зависящих от параметра. Свойства равномерно сходящихся интегралов.
8. Ряды Фурье. Достаточные условия представимости функции рядом Фурье.
9. Мера и интеграл Лебега. Теоремы о предельном переходе под знаком

интеграла (Лебега, Леви, Фату).

10. Основные принципы линейного анализа (теорема Хана-Банаха, принцип равномерной ограниченности, теорема Банаха об обратном операторе).

11. Компактные операторы и их свойства. Интегральные уравнения и теоремы Фредгольма.

12. Принцип сжимающих отображений и его применение к дифференциальным и интегральным уравнениям.

13. Линейные пространства, их подпространства. Базис, размерность. Теорема о ранге матрицы. Система линейных уравнений. Фундаментальная система решений системы линейных однородных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Решение системы линейных неоднородных уравнений.

14. Билинейные и квадратичные формы и их матрицы. Приведение к нормальному виду. Закон инерции.

15. Линейные преобразования линейного пространства, их матрицы. Характеристический многочлен линейного преобразования. Собственные векторы и собственные значения, связь с характеристическими корнями. Жорданова форма линейного оператора и алгоритм ее нахождения.

16. Евклидово пространство. Ортонормированные базисы. Ортогональные и симметрические преобразования, их матрицы. Приведение квадратичной формы к главным осям. Унитарные пространства. Эрмитовы формы.

17. Основные алгебраические структуры (группы, кольца, поля). Теорема Лангранжа. Порядок элемента, циклические группы. Основная теорема о гомоморфизме. Характеристика поля, расширения полей и существование поля разложения.

18. Дифференциальное уравнение 1-го порядка. Теорема о существовании и единственности решения. Численное решение дифференциальных уравнений 1-го порядка.

19. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка. Линейное

однородное уравнение. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского, линейное неоднородное уравнение. Численное решение краевых задач для дифференциальных уравнений 2-го порядка.

20. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами: однородные и неоднородные.

21. Функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана.

22. Элементарные функции комплексного переменного. Простейшие многозначные функции.

23. Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру. Интеграл Коши. Ряд Тейлора.

24. Ряд Лорана. Полюс и существенно особая точка.

25. Аффинная и метрическая классификация кривых и поверхностей 2-го порядка. Проективная классификация кривых.

26. Криволинейные координаты на поверхности. Первая квадратичная форма поверхности. Понятие о внутренней геометрии поверхности.

27. Вторая квадратичная форма поверхности. Нормальная кривизна линии на поверхности. Теорема Менье.

28. Главные направления и главные кривизны. Полная и средняя кривизна поверхности и их поведение при изгибании поверхности. Формула Эйлера. Локальное строение поверхности. Теорема Гаусса (без доказательства).

29. Приближение функций полиномами и сплайнами.

30. Квадратурные формулы.

31. Методы численного решения систем линейных алгебраических уравнений.

32. Итерационные методы решения нелинейных алгебраических уравнений.

33. Численное решение дифференциальных уравнений 1-го порядка.

34. Приближенные методы решения уравнений Фредгольма II рода.

Раздел III. Фонд оценочных средств

3.1. Инструкция по выполнению работы

На входе в КФУ, поступающий проходит процедуру идентификации личности (по паспорту или иному документу, подтверждающему личность), по завершении которой получает экзаменационный лист. Далее в сопровождении сотрудника приемной комиссии проходит в отведенную для проведения вступительного испытания аудиторию. По окончании вступительного испытания листы с работами передаются членам экзаменационной комиссии.

Присутствие на вступительных испытаниях посторонних лиц не допускается.

3.2. Образцы заданий вступительных испытаний

1. Пусть функция $f(x,y) = e^{-1/(x^2+y^2)}$, если $(x,y) \neq (0,0)$, а в точке $(0,0)$ ее значение равно нулю. Доказать, что функция f дифференцируема в точке $(0,0)$ и найти ее частные производные в этой точке.

2. Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\iint_{x^2+y^2\geq 1} \frac{\sin(x+y)dx\,dy}{x^4+y^4}.$$

3. Доказать, что множество

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & b & a \\ b & a & c \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

является векторным пространством, найти его базис и проверить, что отображение $\varphi : V \to V$, определяемое соответствием

$$\varphi : \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & b & a \\ b & a & c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+b+c & a+b & b+c \\ a+b & b+c & a+b+c \\ b+c & a+b+c & a+b \end{pmatrix},$$

является линейным отображением.

4. Найти ортогональное преобразование, приводящее к главным осям квадратичную функцию $x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3$.

5. В правой прямоугольной системе координат в трехмерном евклидовом пространстве $\mathcal{E}_3$ даны вершины тетраэдра: $A(4;3;1)$, $B(6;-1;2)$, $C(2;1;2)$, $D(2;1;-1)$. Найти ортогональную проекцию точки A на плоскость (BCD) и расстояние между прямыми (AC) и (BD).

6. Найти среднюю кривизну поверхности и уравнение касательной плоскости в точке $M(1;1;0)$, если поверхность задана векторной функцией $\overrightarrow{r} = (uv; u; 1-v)$, $u, v \in \mathbb{R}$.

7. Найти все особые точки подинтегральной функции, выяснить их характер и вычислить интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\sin z\,dz}{(z^3+4z)(z^2-1)}, \quad D = \left\{ z = x+iy : x^2/4 + y^2 = 1 \right\}.$$

8. Решить уравнение $\ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = \dfrac{1}{e^t \sin t}$

9. Найти, при каких значениях параметров α и β метод простой итерации для системы

$$x = Bx + b, \quad B = \begin{pmatrix} 2\alpha & 0 \\ 1/4 & \beta \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix},$$

сходится, а при каких — расходится. При $\alpha = 1/6$ и $\beta = 1/4$ построить два приближения ($x^0 = (0; 0)$) и оценить погрешность. (В вычислениях использовать первую норму.)

10. Методом механических квадратур, используя малую формулу Симпсона, найти в виде таблицы значений $\{y_i\}_{i=1}^3$ приближенное решение уравнения Фредгольма

$$y(x) + 3\int_{-1}^{1} \sin\left(\frac{\pi}{2}xt\right) y(t)\, dt = x \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1).$$