

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

«Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по

образовательной деятельности

 А. А. Турилова

2023 г.



ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ

Направление подготовки: 02.04.01 «Математика и компьютерные науки»

(профили подготовки: Методы математического и алгоритмического
моделирования общенаучных и прикладных задач; Статистические методы
науки о данных)

Лист согласования программы вступительного испытания

Разработчик(и) программы:

зав. кафедрой теории функций и приближений

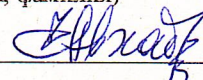
Ф.Г.Авхадиев

зав. кафедрой математической статистики

Е.А.Турилова

(должность, инициалы, фамилия)

Председатель экзаменационной комиссии



Ф.Г.Авхадиев

(подпись) (инициалы, фамилия)

Программа вступительного испытания обсуждена и одобрена на заседании кафедры теории функций и приближений Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Протокол №1 от «31» августа 2023 г.

Программа вступительного испытания обсуждена и одобрена на заседании кафедры математической статистики Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Протокол №1 от «31» августа 2023 г.

Решением Учебно-методической комиссии Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Программа вступительного испытания рекомендована к утверждению Ученым советом, Протокол №1 от «7» сентября 2023 г.

Программа вступительного испытания утверждена на заседании Ученого совета Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского, Протокол №2 от «12» октября 2023 г.

Содержание

Раздел I. Вводная часть

- 1.1 Цель и задачи вступительных испытаний
- 1.2 Общие требования к организации вступительных испытаний
- 1.3 Описание формы проведения вступительных испытаний
- 1.4 Продолжительность вступительных испытаний в минутах
- 1.5 Структура вступительных испытаний

Раздел II. Содержание программы

Раздел III. Фонд оценочных средств

- 3.1. Инструкция по выполнению работы
- 3.2. Образцы заданий вступительных испытаний

Раздел IV. Список литературы

Раздел I. Вводная часть.

1.1 Цель и задачи вступительных испытаний

Цель вступительного испытания – определить уровень профессиональной подготовки абитуриента и соответствие требованиям, предъявляемым к знаниям, умениям и навыкам предметной области, соответствующей профилю подготовки.

Вопросы билетов составляются на основе Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования бакалавриата и позволяют оценить качество знаний, необходимых для освоения программы подготовки магистра по избранному направлению.

1.2 Общие требования к организации вступительных испытаний

К вступительным испытаниям допускаются граждане Российской Федерации и граждане иностранных государств, успешно завершившие обучение по образовательным программам основного общего обязательного и имеющие документ государственного образца: аттестат.

Руководство по организации и проведению вступительных испытаний осуществляют председатель и члены экзаменационной комиссии, которые несут всю полноту ответственности за соблюдение законодательства Российской Федерации, требования ФГОС СПО, локальных документов о подготовке и проведении вступительных испытаний.

Проведение вступительных испытаний осуществляется в соответствии с принципами соблюдения прав и свобод граждан, установленных законодательством РФ, гласности и открытости результатов вступительных испытаний, объективности оценки способностей абитуриентов и единообразия оценки вступительных испытаний. Приём на образовательную программу осуществляется на конкурсной основе по результатам вступительного экзамена.

1.3 Описание формы проведения вступительных испытаний

Вступительные испытания проводятся в форме письменного экзамена очно и (или) с использованием дистанционных технологий.

1.4 Продолжительность вступительных испытаний в минутах

Общая продолжительность экзамена – 160 минут.

1.5 Структура вступительных испытаний

Абитуриент вытягивает билет, который состоит из 10 задач, и записывает решение на бланках для ответов. По истечении времени билет сдаётся и проверяется экзаменационной комиссией. По итогу выставляется одна оценка, соответствующая уровню профессиональной подготовки участника.

Раздел II. Содержание программы

Темы, знание которых необходимо для выполнения экзаменационной работы:

1. Топология на множестве. Открытые и замкнутые подмножества. База и предбаза топологии. Индуцированная топология. Непрерывные отображения топологических пространств.
2. Аксиомы отделимости: хаусдорфовы, регулярные и нормальные пространства. Связные и линейно связные топологические пространства. Компактные пространства.
3. Непрерывные отображения в евклидовых пространствах. Производная и дифференциал отображения. Условия дифференцируемости отображения.
4. Интеграл Римана. Интегрируемость непрерывной на отрезке функции. Формула Ньютона-Лейбница.
5. Ряды функций. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов (непрерывность суммы, почленное интегрирование и дифференцирование).
6. Степенные ряды в действительной и комплексной области. Радиус сходимости, свойства степенных рядов (почленное дифференцирование, интегрирование). Разложение элементарных функций в степенные ряды.
7. Несобственные интегралы и их сходимость. Равномерная сходимость интегралов, зависящих от параметра. Свойства равномерно сходящихся интегралов.
8. Ряды Фурье. Достаточные условия представимости функции рядом Фурье.

9. Мера и интеграл Лебега. Теоремы о предельном переходе под знаком интеграла (Лебега, Леви, Фату).

10. Основные принципы линейного анализа (теорема Хана-Банаха, принцип равномерной ограниченности, теорема Банаха об обратном операторе).

11. Компактные операторы и их свойства. Интегральные уравнения и теоремы Фредгольма.

12. Принцип сжимающих отображений и его применение к дифференциальным и интегральным уравнениям.

13. Линейные пространства, их подпространства. Базис, размерность. Теорема о ранге матрицы. Система линейных уравнений. Фундаментальная система решений системы линейных однородных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли. Решение системы линейных неоднородных уравнений.

14. Билинейные и квадратичные формы и их матрицы. Приведение к нормальному виду. Закон инерции.

15. Линейные преобразования линейного пространства, их матрицы. Характеристический многочлен линейного преобразования. Собственные векторы и собственные значения, связь с характеристическими корнями. Жорданова форма линейного оператора и алгоритм ее нахождения.

16. Евклидово пространство. Ортонормированные базисы. Ортогональные и симметрические преобразования, их матрицы. Приведение квадратичной формы к главным осям. Унитарные пространства. Эрмитовы формы.

17. Основные алгебраические структуры (группы, кольца, поля). Теорема Лангранжа. Порядок элемента, циклические группы. Основная теорема о гомоморфизме. Характеристика поля, расширения полей и существование поля разложения.

18. Дифференциальное уравнение 1-го порядка. Теорема о существовании и единственности решения. Численное решение дифференциальных уравнений 1-го порядка.

19. Линейные дифференциальные уравнения n -го порядка. Линейное

однородное уравнение. Фундаментальная система решений. Определитель Вронского, линейное неоднородное уравнение. Численное решение краевых задач для дифференциальных уравнений 2-го порядка.

20. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами: однородные и неоднородные.

21. Функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана.

22. Элементарные функции комплексного переменного. Простейшие многозначные функции.

23. Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру. Интеграл Коши. Ряд Тейлора.

24. Ряд Лорана. Полус и существенно особая точка.

25. Аффинная и метрическая классификация кривых и поверхностей 2-го порядка. Проективная классификация кривых.

26. Криволинейные координаты на поверхности. Первая квадратичная форма поверхности. Понятие о внутренней геометрии поверхности.

27. Вторая квадратичная форма поверхности. Нормальная кривизна линии на поверхности. Теорема Менье.

28. Главные направления и главные кривизны. Полная и средняя кривизна поверхности и их поведение при изгибании поверхности. Формула Эйлера. Локальное строение поверхности. Теорема Гаусса (без доказательства).

29. Приближение функций полиномами и сплайнами.

30. Квадратурные формулы.

31. Методы численного решения систем линейных алгебраических уравнений.

32. Итерационные методы решения нелинейных алгебраических уравнений.

33. Численное решение дифференциальных уравнений 1-го порядка.

34. Приближенные методы решения уравнений Фредгольма II рода.

35. Условная вероятность. Независимость. Формула полной вероятности.

Формула Байеса.

36. Функция распределения вероятностей и её свойства. Примеры распределения: Бернулли, биномиальное, Пуассона, равномерное, показательное, нормальное и др. распределения.
37. Математическое ожидание и его свойства. Дисперсия и её свойства. Моменты.
38. Закон больших чисел Чебышева.
39. Проверка статистических гипотез.
40. Рекурсивные функции и их особенности.
41. Механизмы управления памятью.
42. Базовые типы в языках программирования.
43. Основные средства и особенности процедурных языков программирования. Процедуры и функции. Описание и использование.
44. Алгоритмы сортировки. Оценка вычислительной сложности алгоритмов сортировки.
45. Алгоритмы поиска. Оценка вычислительной сложности алгоритмов поиска.
46. Линейные списки и алгоритмы их обработки.
47. Деревья и алгоритмы их обработки.
48. Символьные строки и их обработка.
49. Классы. Свойства и методы, защита элементов классов. Создание и уничтожение объектов.
50. Классы. Наследование и полиморфизм.

Раздел III. Фонд оценочных средств

3.1. Инструкция по выполнению работы

На входе в КФУ, поступающий проходит процедуру идентификации личности (по паспорту или иному документу, подтверждающему личность), по завершении которой получает экзаменационный лист. Далее в сопровождении сотрудника приемной комиссии проходит в отведенную для проведения вступительного испытания аудиторию. По окончании

вступительного испытания листы с работами передаются членам экзаменационной комиссии.

Присутствие на вступительных испытаниях посторонних лиц не допускается.

3.2. Образцы заданий вступительных испытаний

1. Пусть функция $f(x, y) = e^{-1/(x^2+y^2)}$, если $(x, y) \neq (0, 0)$, а в точке $(0, 0)$ ее значение равно нулю. Доказать, что функция f дифференцируема в точке $(0, 0)$ и найти ее частные производные в этой точке.

2. Дан программный код на языке C#:

```
string s = "6 2 1 4 5 3";
string[] values = s.Split(" ");
List<int> int_values = new ();
foreach (string v in values)
{
    int_values.Add (int.Parse(v));
}
int_values.Sort();
int_values.RemoveAt(0);
Console.WriteLine(int_values.Sum());
```

Напишите, что будет выведено в результате работы программы на экран.

3. Доказать, что множество

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & b & a \\ b & a & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

является векторным пространством, найти его базис и проверить, что отображение $\varphi : V \rightarrow V$, определяемое соответствием

$$\varphi : \begin{pmatrix} a & c & b \\ c & b & a \\ b & a & c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+b+c & a+b & b+c \\ a+b & b+c & a+b+c \\ b+c & a+b+c & a+b \end{pmatrix},$$

является линейным отображением.

4. Дан программный код:

```
var input = "12:__";
Console.WriteLine(Arrows.GetAngle(input));

public static class Arrows
{
    public static double GetAngle(string timeStr)
    {
        var time = DateTime.Parse(timeStr);
        var k = 180;
        var h = time.Hour % 12;
        var m = time.Minute;
        var ma = (m) * k / 30;
        var ha = (h + m / 60.0) * k / 6;
        var da = Math.Abs(ha - ma);
        if (da > k) return 2 * k - da;
        else return da;
    }
}
```

Какое целое число минут нужно поставить на месте знаков подчеркивания в строке «input», чтобы выводимое программой значение было наиболее близко к 90?

5. В правой прямоугольной системе координат в трехмерном евклидовом пространстве E_3 даны вершины тетраэдра: $A(4; 3; 1)$, $B(6; -1; 2)$, $C(2; 1; 2)$, $D(2; 1; -1)$. Найти ортогональную проекцию точки A на плоскость (BCD) и расстояние между прямыми (AC) и (BD) .

6. Что выведет следующая программа?

```
using System;

var a = new MyClass();
var b = new MyClass();

Console.WriteLine(a.ToString()+" "+b.ToString());

class MyClass
{
    static int num = 0;
    private int id;

    public MyClass()
    {
        num++;
        id = num;
    }

    public string ToString()
    {
        return id + "/" + num;
    }
}
```

7. Найти все особые точки подынтегральной функции, выяснить их характер и вычислить интеграл

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{\sin z \, dz}{(z^3 + 4z)(z^2 - 1)}, \quad D = \{z = x + iy : x^2/4 + y^2 = 1\}.$$

8. Что выведет программа.

```
using System;

string[] mas = { "AB", "A", "BA", "BB", "AA", "B" };
for (int i = 0; i < mas.Length - 1; i++)
{
    for (int j = i; j < mas.Length; j++)
    {
        if (String.Compare(mas[i], mas[j]) < 0)
        {
            string temp = mas[i];
            mas[i] = mas[j];
            mas[j] = temp;
        }
    }
}
for (int i = 0; i < mas.Length; i++)
{
    Console.Write(mas[i] + " ");
}
```


9. Найти, при каких значениях параметров α и β метод простой итерации для системы

$$x = Bx + b, \quad B = \begin{pmatrix} 2\alpha & 0 \\ 1/4 & \beta \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

сходится, а при каких — расходится. При $\alpha = 1/6$ и $\beta = 1/4$ построить два приближения ($x^0 = (0; 0)$) и оценить погрешность. (В вычислениях использовать первую норму.)

10. Методом механических квадратур, используя малую формулу Симпсона, найти в виде таблицы значений $\{y_i\}_{i=1}^3$ приближенное решение уравнения Фредгольма

$$y(x) + 3 \int_{-1}^1 \sin\left(\frac{\pi}{2} xt\right) y(t) dt = x \quad (-1 \leq x \leq 1).$$