

Межрегиональные предметные олимпиады КФУ  
профиль «Математика»  
Заключительный этап  
2021-22 учебный год

11 класс

**Задание 1.** Пусть  $p$  — нечётное простое число. Найдите все целые  $x$  и  $y$  такие, что  $x^3 + y^3 + p^3 = x^2y + xy^2$ .

(25 баллов.)

**Ответ:**  $(0; -p), (-p; 0), (-\frac{1}{2}(p^3 - 1); -\frac{1}{2}(p^3 + 1)), (-\frac{1}{2}(p^3 + 1); -\frac{1}{2}(p^3 - 1))$ .

**Решение.** Перепишем уравнение в виде  $x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 = -p^3$  и разложим левую часть на множители:

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) - (x + y)xy = -p^3 \iff (x + y)(x - y)^2 = -p^3.$$

Таким образом, числа  $x + y$  и  $(x - y)^2$  являются степенями простого числа  $p$ . Но  $(x - y)^2$  — чётная степень  $p$ , значит, множитель  $x + y$  — это нечётная степень  $p$ , и так как  $x + y \leq 0$ , то

$$\begin{cases} x + y = -p, \\ x - y = \pm p, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x + y = -p^3, \\ x - y = \pm 1. \end{cases}$$

В первом случае имеем  $x = 0, y = -p$  или  $x = -p, y = 0$ , во втором —  $x = -\frac{1}{2}(p^3 - 1), y = -\frac{1}{2}(p^3 + 1)$  или  $x = -\frac{1}{2}(p^3 + 1), y = -\frac{1}{2}(p^3 - 1)$ . Так как  $p$  — нечётное, то числа  $x$  и  $y$  в этих наборах — целые.

**Критерии.** Правильно указаны частные решения — не более 3-х баллов. Получено разложение на множители — 3 балла. Рассмотрен только один случай  $x + y = -p$  или  $x + y = -p^3$  — не более 15 баллов.

**Задание 2.** Функция  $f$  для всех действительных  $x, y$  удовлетворяет неравенствам  $f(x + y) \geq f(x) + f(y)$  и  $f(x) \geq x$ . Найдите все такие функции  $f(x)$ .

(25 баллов.)

**Ответ:**  $f(x) \equiv x$ .

**Решение.** Из неравенства  $f(x) \geq x$  при  $x = 0$  следует, что  $f(0) \geq 0$ , а из второго неравенства при  $y = 0$  имеем:  $f(x) = f(x + 0) \geq f(x) + f(0)$ , то есть  $0 \geq f(0)$ , и значит,  $f(0) = 0$ . Отсюда и из неравенства  $f(x + y) \geq f(x) + f(y)$  при  $y = -x$  получим:

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) \geq f(x) + f(-x) \implies -f(-x) \geq f(x).$$

Снова используем первое неравенство  $f(x) \geq x$  теперь для  $-x$ , получим  $f(-x) \geq -x$  или  $x \geq -f(-x)$ . Значит,

$$x \geq -f(-x) \geq f(x) \implies x \geq f(x).$$

Из условия  $f(x) \geq x$  и полученного неравенства следует, что  $f(x) = x$  для всех  $x$ .

**Критерии.** Только ответ — 2 балла. Доказательство равенства  $f(0) = 0$  — 5 баллов. Доказано неравенство  $0 \geq f(x) + f(-x)$  — ещё 5 баллов. Критерии суммируются.

**Задание 3.** Сумма нескольких натуральных чисел, в записи каждого из которых участвуют только цифры 3 и 0, равна  $777 \dots 77$  (2022 семёрки). Какое наименьшее число слагаемых может быть в этой сумме?

(25 баллов.)

**Ответ:** 9 слагаемых.

Пусть  $M = 777 \dots 77 = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ , где числа  $a_k$  записываются только нулями и тройками. Сумма цифр числа  $M$  равна  $2022 \cdot 7$  и делится на 3. Тогда

$$\frac{1}{3}M = \underbrace{259 \ 259 \ \dots \ 259}_{2022 \text{ цифры}} = c_1 + c_2 + \dots + c_n,$$

где числа  $c_k = \frac{1}{3}a_k$  записываются только нулями и единицами. Поскольку  $\frac{1}{3}M$  содержит девятку, наименьшее количество слагаемых в этой сумме равно 9. Эти слагаемые легко находятся для числа 259:  $259 = 2 \cdot 111 + 3 \cdot 11 + 4 \cdot 1$ . Умножая на три, получим:  $777 = 2 \cdot 333 + 3 \cdot 33 + 4 \cdot 3$ . Теперь «периодическим» повторением этой записи получаем:

$$\underbrace{777 \dots 77}_{2022} = 2 \cdot \underbrace{333 \dots 33}_{2022} + 3 \cdot \underbrace{330330 \dots 33}_{2021} + 4 \cdot \underbrace{300 \dots 300}_{2021}.$$

**Критерии.** Только ответ — 0 баллов. Правильный пример — 15 баллов. Доказано, что слагаемых не меньше девяти — 10 баллов.

**Задание 4.** В неравностороннем треугольнике  $ABC$  провели высоту  $BH$ , медиану  $BM$  и биссектрису  $BL$ . Точки  $P$  и  $Q$  — ортогональные проекции вершин  $A$  и  $C$  на прямую  $BL$ . Докажите, что точки  $M, H, P$  и  $Q$  лежат на одной окружности.

(25 баллов.)

**Решение.** Предположим, что  $AB < BC$  (рис. 1). Тогда точка  $P$  лежит внутри треугольника  $ABC$ , а точка  $Q$  — вне треугольника. Обозначим через  $A'$  и  $C'$  точки пересечения прямых  $AP$  и  $BC$ ,  $CQ$  и  $AB$  соответственно. Поскольку  $BP$  — биссектриса и  $BP \perp AA'$ ,  $BQ \perp CC'$ , треугольники  $BAA'$  и  $BCC'$  — равнобедренные, и значит,  $AP = PA'$  и  $CQ = QC'$ .

В треугольнике  $AA'C$  точки  $P$  и  $M$  — середины сторон  $AA'$  и  $AC$ , поэтому  $PM$  — средняя линия, и значит,  $PM \parallel BC$ . Аналогично,  $MQ \parallel BC'$ . Следовательно,  $\angle AMQ = \angle BAC$ . Возможны два случая:

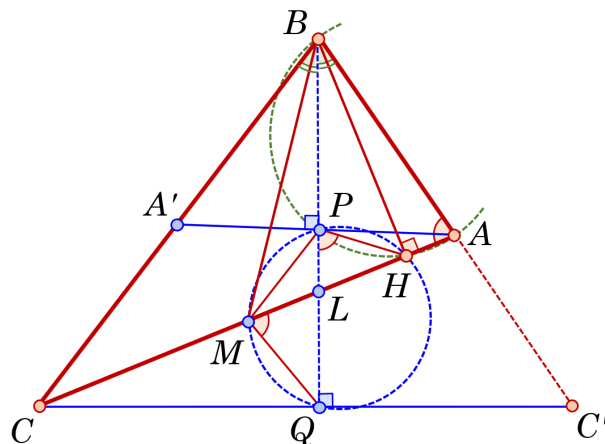


Рис. 1

а)  $\angle BAC \leq 90^\circ$ . Точки  $A, H, P$  и  $B$  лежат на одной окружности с диаметром  $AB$ , поэтому четырёхугольник  $AHPB$  — вписанный. Значит,  $\angle HPQ = 180^\circ - \angle HPB = \angle BAC = \angle HMQ$ . Следовательно, точки  $H, P, M$  и  $Q$  лежат на одной окружности.

б)  $\angle BAC > 90^\circ$ , тогда точки  $A, H, B$  и  $P$  лежат на одной окружности с диаметром  $AB$ , поэтому четырёхугольник  $AHPB$  — вписанный. Значит,  $\angle HPQ = 180^\circ - \angle HPB = 180^\circ - \angle HAB = \angle BAC = \angle HMQ$ . Следовательно, точки  $H, P, M$  и  $Q$  лежат на одной окружности.

**Критерии.** Установлено равенство углов  $HPQ$  и  $BAC$  — 5 баллов. Доказано, что  $PM \parallel BC$  или  $MQ \parallel AB$  — 15 баллов.