

Казанский (Приволжский) федеральный университет
Олимпиада «МагистриУм»
Заключительный этап
2021-2022 учебный год
Институт ИВМ и ИТ
Профиль: Прикладная математика

Задание 1 (15 баллов) Найти предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x) - x}{\operatorname{tg}(x) - x} \right).$$

Ответ: -0.5

Задание 2 (15 баллов) Пусть $y_n(x) = \sqrt[n]{x + \sqrt{x + \dots + \sqrt{x + \sqrt{x + 1}}}}$, $x \geq 0$. Найти

предел $\lim_{n \rightarrow \infty} y'_n(0)$.

Ответ: 1

Задание 3 (15 баллов) Найти $y(2)$, если y есть решение задачи Коши

$$\begin{aligned} x^2 y''(x) &= 2y(x), \quad x > 0, \\ y(1) &= 0, \quad y'(1) = 3. \end{aligned}$$

Ответ: 3.5

Задание 4 (15 баллов) Вычислить $\det(A^{2021} + A^{2022})$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: 10

Задание 5 (20 баллов) Найдите сумму $x + y$, где пара (x, y) есть решение системы

$$\begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y} \\ x^2 y = 1. \end{cases}$$

с максимальным значением x .

Ответ: 2

Задание 6 (20 баллов) Известно, что $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} = 1.7725\dots$, где $e = 2.71828\dots$ –

основание натурального логарифма. Вычислите значение интеграла $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-1/x^2} dx$.

Результат нужно записать в виде числа с фиксированной точкой после его округления до двух знаков после точки.

Ответ: 0.24