

Межрегиональные предметные олимпиады КФУ
профиль «Экономика»
заключительный этап
2022-2023 учебный год
10-11 классы

Задача 1 (8 баллов) «Страна Рубляндия»

ВВП страны Рубляндия в 2022 году составил 5000 млрд. руб., инвестиции - 500 млрд. руб., сальдо госбюджета - 20 млрд. руб., потребительские расходы - 3000 млрд. руб., государственные закупки товаров и услуг - 900 млрд. руб. Определите:

- а) (2 балла) чистый экспорт,
- б) (2 балла) чистые налоги,
- в) (2 балла) располагаемый доход,
- г) (2 балла) частные сбережения.

Задача 2 (20 баллов) «Строитель»

В стране «Стройгорск» производят только два блага: кирпичи в шт. (x) и цемент в килограммах (y). Страна состоит из двух регионов, кривые производственных возможностей в которых задаются функциями: $y_1 = 100 - x_1^2$ и $y_2 = 10 - x_2$ соответственно. Также известно, что все местные жители - строители, поэтому потребляют кирпичи и цемент в соотношении 1:14 соответственно.

а) (8 баллов) Выясните, сколько кирпичей и цемента произведут в «Стройгорске».

Неожиданно, «Стройгорск» открылся для внешней торговли, теперь он может импортировать и экспортировать кирпичи и цемент по ценам: $P_x = 2$ д. е., $P_y = 1$ д. е.

б) (12 баллов) Выясните, сколько теперь жители смогут потребить кирпичей и цемента. Ответы округлите до сотых.

Задача 3 (20 баллов) «Разные цены»

На рынке шапок в стране «РазныеЦены» существует всего один производитель, спрос на товары которого предъявляют 2 группы потребителей. Функции спросов описываются функциями: $Q_1^d = 50 - P_1$, $Q_2^d = 100 - 2P_2$, где Q_1^d , Q_2^d - величина спроса первой и второй группы потребителей, P_1 , P_2 - цены для первой и второй группы потребителей.

Производитель продает шапки обеим группам потребителей по одинаковым ценам, а функция его издержек имеет вид: $TC = Q^2$, где Q - общее количество произведенных шапок (в штуках), а $Q = Q_1 + Q_2$, где Q_1 и Q_2 - количество шапок, произведенных для первой и второй группы потребителей.

а) (8 баллов) Выясните, сколько шапок будет куплено в стране «РазныеЦены» при условии, что производитель продает шапки двум группам потребителей по одной и той же цене;

б) (12 баллов) На фоне изменения предпочтений и доходов второй группы потребителей их спрос на шапки меняется и теперь имеет вид: $Q_2^d = 37,5 - \frac{1}{8}P_2$. Выясните, сколько шапок будет куплено в стране «РазныеЦены» при условии, что производитель продает шапки двум группам потребителей по разным ценам (то есть дискриминирует по цене). На сколько изменится прибыль производителя?

Задача 4 (22 балла) «Счастье - наше все»

В стране «Утопия» жители очень любят товар «Счастье», который с давних времен производят только две фирмы-олигополисты «Ромео» и «Джюльетта», они принимают решение о выпуске одновременно и независимо, зная функции издержек друг друга: $TC_1 = 2Q_1^2 + 20Q_1$, $TC_2 = 2Q_2^2 + 20Q_2$, где Q_1 и Q_2 – производимое количество единиц товара «Счастье», а TC_1 и TC_2 – совокупные издержки каждой из фирм. Функция спроса на рынке товара «Счастье» описывается функцией: $Q^d = 500 - 0,5P$, где Q^d – величина спроса, P – цена одной шапки.

а) (6 баллов) Выясните, сколько единиц товара «Счастье» будет потреблено в стране?

Правительство страны «Утопия» всячески пытается максимизировать потребление товара «Счастье», на этот раз Министр социального развития решил ввести потоварную субсидию обеим фирмам-олигополистам в размере 50 д.е.

б) (8 баллов) Сколько единиц товара «Счастье» теперь будет потреблено в стране?

В дело решил вмешаться Президент страны «Утопия». Он отменил все ранее принятые решения и приказал фирмам-олигополистам работать как совершенные конкуренты.

в) (8 баллов) Сколько единиц товара «Счастье» будет потреблено в стране?

Задача 5 (30 баллов) «Город Эмск»

В городе Эмске живет 200 человек. Город богат своей историей и хранит традиции своего народа, передавая их из поколения в поколение. Одна из традиций касается пищевого рациона жителей. Изо дня в день они потребляют **только** картофель (x) в килограммах и мясо (y) в килограммах, а индивидуальная функция предпочтений каждого горожанина имеет вид:

$$u = 2 * x * y,$$

где x - количество потребляемого картофеля в месяц (в кг.),

y - количество потребляемого мяса в месяц (в кг.),

и - суммарная полезность за месяц

По данным местного органа статистики, цены за килограмм картофеля и килограмм мяса равны соответственно: $P_x = 10$ д. е., $P_y = 5$ д. е., каждый житель получает равный доход 160 д. е. в месяц, который полностью тратится на покупку пищи.

а) (7 баллов) Выясните, сколько килограмм картофеля и мяса будет потреблено в городе Эмске за месяц;

Из-за введенных экономических санкций в отношении города Эмск, иностранный импорт картофеля по фиксированным ценам был прекращен, но в дело вошли местные предприниматели, суммарная обратная функция предложения которых имеет вид: $P_x = x^2$, где x - количество произведенного картофеля в килограммах. Цена на мясо осталась прежней.

б) (10 баллов) Выясните, сколько теперь килограмм картофеля и мяса будет потреблено в Эмске за месяц;

Вопреки местному законодательству, предприниматели города Эмска, производившие картофель, решили объединиться в одну фирму-монополиста, поровну деля прибыль между собой. Один из работников этой фирмы в средствах массовой информации сообщил, что функция издержек фирмы-монополиста имеет вид: $ТС(x) = x^2 - 2 * x + 5$, где x - количество произведенного картофеля в килограммах.

в) (13 баллов) Выясните, сколько теперь килограмм картофеля и мяса будет потреблено в городе Эмске за месяц.

Решения

Задача 1

ВВП = потребительские расходы (С) + валовые инвестиционные расходы (I) + государственные закупки (G) + чистый экспорт (Xn).

Таким образом, величина чистого экспорта определяется как разность валового внутреннего продукта (5000 млрд. руб.) и суммы потребительских расходов (3000 млрд. руб.), инвестиций (500 млрд. руб.) и государственных закупок товаров и услуг (900 млрд. руб.).

Чистый экспорт = $5000 - (3000 + 500 + 900) = 600$ млрд. руб.
Располагаемый доход домашних хозяйств распадается на потребительские расходы и сбережения, т. е.

Располагаемый доход = Потребительские расходы + Сбережения.

Сбережения домашних хозяйств направляются на финансовый рынок, из него – к фирмам в виде инвестиций либо государству в виде займов, если сальдо госбюджета отрицательно. Если сальдо положительно, то государство, как и домашние хозяйства, обеспечивает приток средств на финансовый рынок, которые направляются на инвестиции. Следовательно, располагаемый доход в нашем случае равен сумме потребительских расходов (3000 млрд. руб.) и инвестиций (500 млрд. руб.) за минусом сальдо государственного бюджета (20 млрд. руб.).

Располагаемый доход = $3000 + 500 - 20 = 3480$ млрд. руб.

Чистые налоги равны государственным закупкам товаров и услуг (900 млрд. руб.) плюс сальдо государственного бюджета (20 млрд. руб.).

Чистые налоги = $900 + 20 = 920$ млрд. руб.

Частные сбережения равны инвестициям (500 млрд. руб.) за минусом сальдо государственного бюджета (20 млрд. руб.).

Частные сбережения = $500 - 20 = 480$ млрд. руб.

Ответы:

а) Чистый экспорт = 600 млрд. руб.;

б) чистые налоги = 920 млрд. руб.;

в) располагаемый доход = 3480 млрд. руб.;

г) частные сбережения = 480 млрд. руб.

Задача 2

а) $y_1 = 100 - x_1^2$, $y_2 = 10 - x_2$. Сложим эти две кривые производственных возможностей аналитически: Допустим, $x = x_1 + x_2$, а $y = y_1 + y_2$, тогда $y = 110 - x_1^2 - x_2$. При условии, что $x_2 = x - x_1$: $y = -x_1^2 + x_1 - x + 110 \rightarrow \max$, при $x < 10$ и $x < x$.

При $x \leq 0,5$, то $x_1 = x$:

$$y = -x^2 + x - x + 110$$

$$y = 110 - x^2.$$

При $0,5 < x < 10,5$, то $x_1 = 0,5$:

$$y = -0,25 + 0,5 - x + 110 \Rightarrow y = 110,25 - x.$$

При $20 > x > 10,5$, то $x_1 = x - 10$:

$$y = -(x - 10)^2 + x - 10 - x + 110 \Rightarrow y = -x^2 + 20x.$$

Таким образом,

$$y = 110 - x^2, \text{ при } 0 \leq x \leq 0,5$$

$$y = 110,25 - x, \text{ при } 0,5 \leq x \leq 10,5$$

$$y = -x^2 + 20x, \text{ при } 10,5 \leq x \leq 20.$$

Если кирпичи (x) и цемент (y) потребляются в соотношении 1:14 соответственно, то уравнение потребления имеет вид: $y = 14x$. Найдем пересечения уравнения потребления с уравнением кривой производственных возможностей: $14x = 110,25 - x \Rightarrow x = 7,35$, $y = 102,9$.

б) По условию, $P_x = 2$, а $P_y = 1$, тогда каждую единицу x мы обмениваем на две единицы y. Следовательно, наклон кривой торговых возможностей равен 2 \Rightarrow кривая торговых возможностей имеет вид: $y = 121 - 2x$. В таком случае: $14x = 121 - 2x \Rightarrow x = 7,56$ $y = 105,88$

Задача 3.

а) Функции спроса первой группы и второй группы имеет вид соответственно: $Q_1^d = 50 - P_1$, $Q_2^d = 100 - 2P_2$. Сложим их по горизонтали (так как производитель не дискриминирует по цене): $Q^d = 150 - 3P$, тогда обратная функция спроса будет иметь вид: $P^d = 50 - \frac{1}{3}Q$. Выпишем функцию прибыли фирмы: $\Pi(Q) = -\frac{4}{3}Q^2 + 50Q \rightarrow \max$; - это парабола (ветви вниз), следовательно максимум в вершине. Найдем Q-координаты вершины: $Q = 18,75$, тогда $P = 43,75$. Прибыль равна 468,75 ед.

б) При условии, что производитель уже дискриминирует по цене, а спрос второй группы потребителей теперь имеет вид $Q_2^d = 37,5 - \frac{1}{8}P_2$, выпишем функцию прибыли фирмы-монополиста: $\Pi(Q_1; Q_2) = -Q_1^2 + 50Q_1 - 8Q_2^2 + 300Q_2 - (Q_1 + Q_2)^2 \Rightarrow \Pi(Q_1; Q_2) = -2Q_1^2 + Q_1(50 - 2Q_2) - 9Q_2^2 + 300Q_2$. Рассмотрим данную функцию, как функцию от одной переменной Q_1 , а также зафиксируем Q_2 . Тогда это парабола (ветви вниз) \Rightarrow максимум в вершине. Найдем Q_1 -координаты вершины: $Q_1 = \frac{50 - 2Q_2}{4} = 12,5 - 0,5Q_2$. Подставим данное значение в функцию прибыли от Q_1 и Q_2 : $\Pi(Q_2) = -2(12,5 - 0,5Q_2)^2 + 4(12,5 - 0,5Q_2)(50 - 2Q_2) - 9Q_2^2 + 300Q_2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \Pi(Q_2) = -5Q_2^2 + 100Q_2 \rightarrow \max$; парабола (ветви вниз), следовательно, максимум в вершине. Найдем Q_2 -координаты вершины: $Q_2 = 10 \Rightarrow Q_1 = 7,5 \Rightarrow \Pi = 3000$. Прибыль увеличилась на 2531,25 ед.

Задача 4

а) Обратная функция спроса на товар имеет вид $P^d = 1000 - 2Q \Rightarrow P^d = 1000 - 2Q_p - 2Q_d$. Выпишем прибыль фирмы «Ромео»:

$\Pi(Q_p) = -4Q_p^2 + Q_p(980 - 2Q_d) \rightarrow \max$ – парабола (ветви вниз) \Rightarrow максимум в вершине. Найдем Q-координаты вершины: $Q_p = \frac{980-2Q_d}{8}$. Так как функции издержек обеих фирм схожи, то и Q-координаты вершины зеркальны: $Q_d = \frac{980-2Q_p}{8} \Rightarrow Q_p = 0,5(980 - 8Q_d) \Rightarrow 0,5(980 - 8Q_d) = \frac{980-2Q_d}{8} \Rightarrow Q_d = 98, Q_p = 98$. Общее потребление товара «Счастье»:

$$Q = 196$$

б) Теперь функция предложения (с учетом потоварной субсидии 50 д.е. каждой фирме) выглядит так (для фирмы «Ромео»): $\Pi(Q_p) = -4Q_p^2 + Q_p(1030 - 2Q_d) \rightarrow \max$; – это парабола (ветви вниз), следовательно, максимум в вершине. Найдем Q-координаты вершины: $Q_p = \frac{1030-2Q_d}{8}$. Так как функции издержек обеих фирм схожи (и потоварные субсидии одинаковы), то и Q-координаты вершины зеркальны: $Q_d = \frac{1030-2Q_p}{8} \Rightarrow Q_p = 0,5(1030 - 8Q_d) \Rightarrow 0,5(1030 - 8Q_d) = \frac{1030-2Q_d}{8} \Rightarrow Q_d = 103, Q_p = 103$. Общее потребление товара «Счастье»:

$$Q = 206$$

в) При условии, что на рынке товара «Счастье» установилась совершенная конкуренция, теперь обе фирмы являются ценополучателями, следовательно, принимают цену, как заданную. Тогда функцию прибыли фирмы «Ромео» можно записать так: $\Pi_p = Q_p P - 2Q_p^2 - 20Q_p \rightarrow \max$, это парабола (ветви вниз) \Rightarrow максимум в вершине. Найдем Q-координаты вершины: $Q_p = \frac{P-20}{4}$, аналогично, $Q_d = \frac{P-20}{4}$ – это и есть функции предложения каждой из фирм в зависимости от цены на товар «Счастье». Сложим две функции предложения по горизонтали, тогда общая функция предложения имеет вид: $Q^s = \frac{P-20}{2}$. Найдем равновесие на рынке совершенной конкуренции товара «Счастье» $\frac{P-20}{2} = 500 - 0,5P \Rightarrow 1000 - P = P - 20, P = 510, Q = 245$.

Задача 5

а) Если функция индивидуальных предпочтений **каждого** человека имеет одинаковый вид: $u = 2 * x * y$, то функция предпочтений для всего населения будет такой же. Обозначим ее так: $U = 2 * x * y$.

Нам известно, что $P_x = 10$ д.е., $P_y = 5$ д.е., доход одного человека равен 160 д.е., значит доход всего населения равен 32000 д.е. (200 человек * 160 д.е.). Тогда функция бюджетного ограничения будет иметь вид (при условии, что доход полностью тратится на покупку картофеля и мяса): $10 * x + 5 * y = 32000$, то есть: $y = 6400 - 2x$.

Подставим функцию бюджетного ограничения в функцию полезности:

$U = 2 * x * (6400 - 2 * x) \Rightarrow U = -4x^2 + 12800x \rightarrow \max$, при $0 < x < 3200$; – парабола (ветви вниз), следовательно, максимум - в вершине параболы. $x_{\text{верш}} = 1600$, тогда $y = 3200$. Следовательно, в городе Эмске будет потреблено **1600 кг. картофеля и 3200 кг. мяса.**

б) Теперь цена на картофель будет зависеть от покупаемого количества, тогда функцию бюджетного ограничения можно записать: $x^3 + 5y = 32000 \Rightarrow y = 6400 - 0,2x^3$. Подставим функцию бюджетного ограничения в функцию полезности: $U = 2 * x * (6400 - 0,2x^3) \Rightarrow U = -0,4x^4 + 12800x \rightarrow \max$, при $0 < x < 31,75$ (приблизит.); возьмем производную от функции полезности: $U' = -1,6x^3 + 12800$. Найдем критические точки: $x_{\text{крит}} = 20$. Значение производной при $x > 20$ меньше нуля, значение производной при $x < 20$ больше нуля $\Rightarrow x = 20$ – максимум. Тогда население города Эмска потребит **20 кг. картофеля и 4800 кг. мяса.**

в) Фирма-монополист максимизирует свою прибыль. Для того, чтобы узнать, какую цену и объем выпуска выберет монополист, нужно узнать спрос на его товар.

Функция бюджетного ограничения теперь имеет вид: $y = 6400 - \frac{P_x}{5} * x$, подставляя ее в функцию полезности получаем: $U = 2 * x * (6400 - \frac{P_x}{5} * x) \Rightarrow U = -\frac{2*P_x}{5} * x^2 + 12800 * x \rightarrow \max$, при $0 < x < \frac{32000}{P_x}$; – парабола (ветви вниз) \Rightarrow максимум - в вершине параболы. $x_{\text{верш}} = \frac{16000}{P_x}$ – это и есть функция спроса на картофель. Выпишем функцию прибыли монополиста: $\Pi(x) = 16000 - x^2 + 2x - 5 \Rightarrow \Pi(x) = -x^2 + 2x + 15995 \rightarrow \max$, при $0 < x < \frac{32000}{P_x}$; – парабола (ветви вниз), следовательно, максимум в вершине. $x_{\text{верш}} = 1 \Rightarrow P_x = 16000 \Rightarrow y = 3200$. Тогда жители города Эмска потребят **1 кг. картофеля и 3200 кг. мяса.**