МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"

УТВЕРЖДАЮ

Первый проректор –
проректор по научной деятельности

_______________ Д.А. Таюрский

« 28 » 04 2022 г.

Программа вступительного испытания по специальности

Уровень высшего образования: подготовка кадров высшей квалификации
Тип образовательной программы: программа подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре
Научная специальность: 1.1.3 Геометрия и топология
Форма обучения: очная

2022

Общие указания

Вступительные испытания по специальности 1.1.3 Геометрия и топология охватывают стандартные разделы университетских курсов по дифференциальной геометрии, топологии, дифференцируемым многообразиям, римановой геометрии, тензорному анализу, группам Ли, расслоенным пространствам, проективной геометрии, неевклидовым геометриям. Также проверяются базовые компетенции математического аппарата. Вопросы экзаменационных билетов для вступительного испытания приведены ниже.

Порядок проведения вступительных испытаний

Вступительное испытание проводится в форме экзамена на основе билетов. В каждом экзаменационном билете по 2 вопроса. Экзамен проходит в письменной форме. Подготовка к ответу составляет 1 академический час (60 минут) без перерыва с момента раздачи билетов. Задания оцениваются от 0 до 100 баллов в зависимости от полноты и правильности ответов.

Критерии оценивания

Оценка поступающему за письменную работу выставляется в соответствии со следующими критериями.

Отлично (80-100 баллов)

Поступающий в аспирантуру уверенной владеет материалом, приводит точные формулировки теорем и других утверждений, сопровождает их строгими и полными доказательствами, уверенно отвечает на дополнительные вопросы программы вступительного испытания.

Хорошо (60-79 баллов)

Поступающий в аспирантуру владеет материалом, приводит точные формулировки теорем и других утверждений, сопровождает их доказательствами, в которых допускает отдельные неточности. Отвечает на большинство дополнительных вопросов по программе вступительного испытания.

Удовлетворительно (40-59 баллов)

Поступающий в аспирантуру знаком с основным материалом программы, приводит формулировки теорем и других утверждений, но допускает некоторые неточности, сопровождает их доказательствами, в которых допускает погрешности либо описывает основную схему доказательств без указания деталей. Отвечает на дополнительные вопросы по программе вступительного испытания, допуская отдельные неточности.

Неудовлетворительно (менее 40 баллов)

Поступающий в аспирантуру не владеет основным материалом программы, не знаком с основными понятиями, не способен приводить формулировки теорем и других утверждений, не умеет доказывать теоремы и другие утверждения, не знает даже схемы доказательств. Не отвечает на большинство дополнительных вопросов по программе вступительного испытания.

Вопросы программы вступительного испытания в аспирантуру по научной специальности 1.1.3 Геометрия и топология

Тема 1: Топология и дифференциальная геометрия

1. Топология на множестве. Открытые и замкнутые множества. Внутренность и замыкание подмножества. Граница подмножества. База и предбаза топологии. Топология подпространства (индуцированная топология). Топология произведения топологических пространств. Непрерывные отображения топологических пространств.

2. Аксиомы отделимости: хаусдорфовы, регулярные и нормальные пространства. Примеры. Связные топологические пространства. Связные множества на вещественной прямой. Линейно связные топологические пространства. Примеры.

3. Компактные пространства. Компактные множества на вещественной прямой и в R^n. Локально компактные пространства.

4. Параметризованная кривая. Сопровождающий репер (трехгранник Френе) и формулы Серре-Френе. Кривизна и кручение кривой.

5. Параметризованные поверхности и поверхности, заданные неявно. Огибающая однопараметрического семейства поверхностей. Характеристики. Ребро возврата. Развертывающиеся поверхности.

6. Метрический тензор поверхности и его применение (длина кривой, лежащей на поверхности, углы между кривыми, площадь куска поверхности). Внутренняя геометрия поверхности.

7. Тензор второй квадратичной формы поверхности и оператор Вейнгартена. Главные направления и главные кривизны. Полная и средняя кривизны.

8. Подвижной репер на поверхности и деривационные уравнения. Уравнения Гаусса-Вейнгартена. Коэффициенты индуцированной линейной связности на поверхности. Символы Кристоффеля. Абсолютная производная векторного поля вдоль кривой на поверхности. Геодезическая кривизна кривой. Геодезические линии.

9. Теорема Гаусса о принадлежности полной кривизны внутренней геометрии поверхности.

Тема 2: Дифференцируемые многообразия, риманова геометрия и тензорный анализ.

1. Определение дифференцируемого многообразия. Топологическое многообразие. Атлас, многообразие класса C^k. Ориентация на многообразии. Ориентируемые и неориентируемые многообразия. Примеры многообразий. Дифференцируемые отображения, категория дифференцируемых многообразий.

2. Касательное пространство к дифференцируемому многообразию в данной точке. Касательное расслоение. Касательное отображение. Касательный функтор. Касательные векторы как дифференцирования пространства функций.

3. Подмногообразие. Теоремы о неявной и обратной функциях (без доказательства). Теорема о дифференцируемом отображении постоянного ранга. Погружения и вложения. Субмерсии. Критические точки и критические значения дифференцируемого отображения. Прообраз регулярного значения.

4. Векторные поля на многообразиях. Интегральные кривые векторного поля. Однопараметрическая группа диффеоморфизмов. Локальная однопараметрическая группа диффеоморфизмов. Теорема о локальной однопараметрической группе диффеоморфизмов, порождаемой векторным полем. Теорема о выпрямлении векторного поля. Скобка Ли векторных полей.

5. Распределения на многообразиях. Вполне интегрируемые распределения. Теорема Фробениуса (без доказательства).

6. Сопряженное пространство векторного пространства. Сопряженный базис. Преобразование базисов и координат в векторном пространстве и сопряженном пространстве. Кокасательное пространство к дифференцируемому многообразию в данной точке и кокасательное расслоение.

7. Тензоры типа (p,q) на векторном пространстве. Пространство тензоров. Базис и координаты в пространстве тензоров типа (p,q). Произведение тензоров. Свертка тензоров по паре аргументов (индексов). Взаимная свертка двух тензоров. Преобразование координат тензора. Тензорное произведение векторных пространств.

8. Расслоение тензоров типа (p,q) на дифференцируемом многообразии. Тензорное поле на дифференцируемом многообразии.

9. Перестановка аргументов у тензора. Симметричные и кососимметричные тензоры. Операции симметрирования и альтернации тензора, их свойства.

10. Метрический тензор евклидова пространства. Канонический изоморфизм евклидова пространства и его сопряженного пространства. Тензоры на евклидовом пространстве. Форма объема. Поднятие и опускание индекса у тензора.

11. Перестановка аргументов у тензора. Симметричные и кососимметричные тензоры. Операции симметрирования и альтернации тензора, их свойства.

12. Риманово многообразие. Каноническая линейная связность на римановом многообразии (связность Леви-Чивита). Тензор кривизны.

13. Внешние формы на векторном пространстве. Внешнее произведение внешних форм и его свойства. Базис и координаты в пространстве внешних p-форм.

14. Дифференциальные p-формы на гладком многообразии. Внешний дифференциал и его свойства. Замкнутые и точные формы. Когомологии де Рама. Поведение дифференциальных форм и когомологий при отображениях. Пример: когомологии де Рама окружности.

Тема 3: Группы Ли и расслоенные пространства.

1. Группы Ли. Гомоморфизмы групп Ли. Алгебры Ли. Гомоморфизмы алгебр Ли. Левоинвариантные и правоинвариантные векторные поля и дифференциальные формы. Алгебра Ли группы Ли. Уравнения Маурера-Картана. Ортогональная группа O(n) и ее свойства. Полная линейная группа GL(n,R) и ее свойства. Специальная линейная группа SL(n,R) и ее свойства. Алгебры Ли групп Ли GL(n,R), SL(n,R) и O(n).

2. Однопараметрические подгруппы. Экспоненциальное отображение. Замкнутые подгруппы группы Ли. Присоединенное представление.

3. Действие группы Ли на дифференцируемом многообразии. Фундаментальные векторные поля. Однородные пространства.

4. Локально тривиальные расслоения. Функции склейки. Морфизмы локально тривиальных расслоений. Обратный образ расслоения. Расслоенное произведение. Накрытия. Сечения расслоения. Расслоение с фундаментальной группой. Примеры расслоений. Расслоения Хопфа.

5. Векторные расслоения. Касательное расслоение дифференцируемого многообразия.

6. Главные расслоения. Функции склейки главного расслоения. Расслоение линейных реперов дифференцируемого многообразия. Морфизмы главных расслоений. Расслоение ортонормированных реперов риманова многообразия.

7. Ассоциированные расслоения. Касательное расслоение как расслоение, ассоциированное с расслоением линейных реперов. Тензорные расслоения.

8. Связность в главном расслоении. Фундаментальные векторные поля. Существование связности в главном расслоении. Параллельное перенесение. Группа голономии. Гомоморфизмы связностей. Связность в присоединенном расслоении.

9. Форма кривизны. Структурное уравнение связности.

10. Линейная связность на многообразии. Параллельное перенесение тензоров вдоль кривых на многообразии. Ковариантная производная тензорного поля и ее свойства. Геодезические линии.
11. Тензоры кручения и кривизны линейной связности. Геометрический смысл тензора кривизны. Связность нулевой кривизны и нулевого кручения. Тождества Бьянки для пространств с нулевым кручением.

Тема 4: Проективная и неевклидовы геометрии.

1. Проективное пространство. Структура проективного пространства на множестве. Модели проективных пространств. Проективные реперы и проективные координаты. Уравнения m-плоскостей проективного пространства.

2. Проективные преобразования. Ангармоническое отношение. Аффинное пространство как проективное пространство с выделенной гиперплоскостью. Однородные координаты. Проективные преобразования аффинного пространства.

3. Сопряженное проективное пространство. Ангармоническое отношение четверки гиперплоскостей, принадлежащих одному пучку. Принцип двойственности.

4. Теоремы Дезарга и Паппа.

5. Полный четырехвершинник. Гармонические четверки точек. Теорема Фано.

6. Проективные преобразования на проективной прямой и на проективной плоскости. Перспективные отображения. Гомологии.

7. Комплексификация проективного пространства.

8. Гиперповерхности второго порядка и их классификация. Полюсы и полярные гиперплоскости. Касательная гиперплоскость.

9. Эллиптическая геометрия в схеме Вейля.

10. Гиперболическая геометрия в схеме Вейля. Модели Пуанкаре и Кэли-Клейна плоскости Лобачевского.

Учебно-методическое обеспечение и информационное обеспечение программы вступительного испытания в аспирантуру по научной специальности 1.1.3 Геометрия и топология

1. Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. Изд. 3-е, перераб. и доп. Санкт-Петербург: Лань, 2010. – 512 с.
2. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Геометрия поверхностей, групп преобразований и полей. Современная геометрия: методы и приложения. Т. 1. Москва URSS [Либроком 2013] 335 с.
3. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Геометрия и топология многообразий. Современная геометрия: методы и приложения. Т.2. Москва URSS [Либроком 2013] 295 с. 4. Борисович Ю.Г. и др. Введение в топологию. М. Наука. 1995.
5. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Теория гомологий. Современная геометрия: методы и приложения. Т. 3. Москва URSS [Либроком 2013] 287 с.
6. Косневски Ч. Начальный курс алгебраической топологии. М. Мир. 1983. 302 с.
7. Малахальцев М.А., Фомин В.Е. Задачи и упражнения по курсу дифференциальной геометрии и топологии. Часть I. Казанский университет. 2006. 64 с.
8. Малахальцев М.А., Фомин В.Е. Сборник задач по тензорному анализу. Методическое пособие. Казанский университет. 2008.
9. Малахальцев М.А., Фомин В.Е. Задачи и упражнения по курсу дифференциальной геометрии и топологии. Часть I. Казанский университет. 2008. 56 с.
10. Задачи по тензорному анализу и римановой геометрии. Под ред. Б.Н.Шапукова. Издательство Казанского ун-та. 1993.
11. Постников М.М. Гладкие многообразия. (Лекции по геометрии. Семестр III). М. Наука. 1987.
12. Базылев В.Т., Дуничев К.И. Геометрия II. М. Просвещение. 1975. 367 с.
13. Уорнер Ф. Основы теории гладких многообразий и групп Ли. М. Мир. 1987.
14. Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия. «Лань». 2008. 304 с.
15. Зорич В.А. Математический анализ. Т. 1,2 М. МЦНМО. 2007. 1488 с.

Программа вступительного испытания в аспирантуру составлена в соответствии с государственными образовательными стандартами высшего профессионального образования по специальности 1.1.3 Геометрия и топология.